

Math. A.
206 3

Ein neuer Lehrsatz

der

Aërodynamik,

nebst den Anwendungen dieses Satzes

auf

die Gebläse- und Wettermaschinen und die calorischen
Maschinen

und auf die Bewegungen der Atmosphäre,

von

Albert Rhodius,

Königl. Ober-Bergamts-Markscheider zu Bonn.

Bonn,

bei Adolph Marcus.

1865.

C

Ein neuer Lehrsatz
der
Aërodynamik,

nebst den Anwendungen dieses Satzes

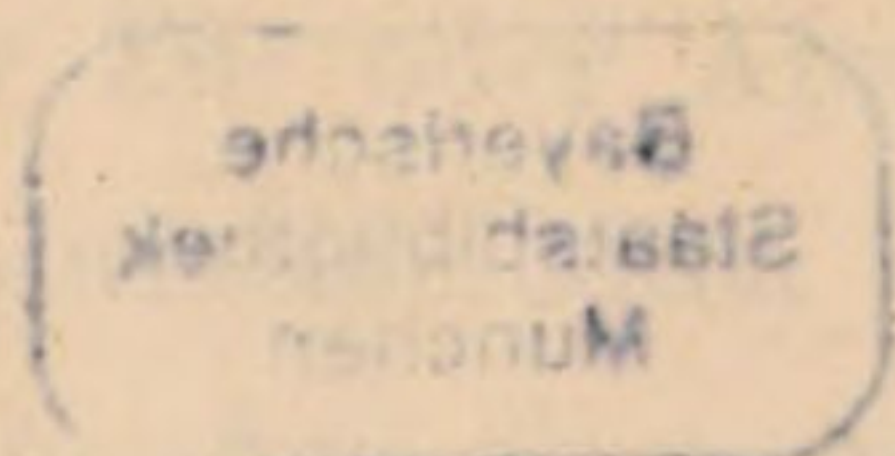
auf
die Gebläse- und Wettermaschinen und die calorischen
Maschinen

und auf die Bewegungen der Atmosphäre,

von

Albert Rhodius,

Königl. Ober-Bergamts-Markscheider zu Bonn.



Bonn,

bei Adolph Marcus.

1865.

Ein neuer Lehratz

der

Aërodynamik.

nebst den Anwendungen dieses Satzes

an

die Götter- und Wettermaschinen und die calorischen
Maschinen

und auf die Bewegungen der Atmosphäre.



Bonn

bei Adolph Marcus

1866

Vorwort.

Der in gegenwärtiger Schrift abgehandelte neue Lehrsatz lehrt die Relation kennen, welche bei der Bewegung eines Gases innerhalb eines von beweglichen oder festen Flächen begrenzten Raumes, oder beim Durchgange eines Gases durch einen solchen Raum, zwischen den auf das Gas Statt habenden Wirkungen bewegender Kräfte, den zuströmenden oder entweichenden Wärmequantitäten, der Zu- oder Abnahme der Temperatur und der lebendigen Kraft, der Zu- oder Abnahme der Summe der Produkte aus den Volumelementen des erwähnten Raumes und den darin bestehenden Spannungen des Gases, und der Arbeit besteht, welche die beweglichen Begrenzungsflächen jenes Raumes unter dem Drucke des Gases verrichten.

Was für Anwendungen sich von unserem Lehrsatze machen lassen, ist aus den §§. 10, 11 und 12, in welchen wir verschiedene solcher Anwendungen beispielsweise behandelt haben, zu ersehen.

Der Inhalt des §. 11 dürfte übrigens, was wir hier noch besonders hervorheben wollen, als die Grundlage zu einer neuen Theorie der Gebläse- und Wettermaschinen und der calorischen Maschinen anzusehen sein.

Bonn, im September 1865.

Albert Rhodius.

Nachtrag

zu den auf der letzten Seite angegebenen Verbesserungen.

S. 62 Z. 4 von oben statt werden lese man worden.

§. 1. Die Aërodynamik ist die Lehre von der Bewegung der elastischen Flüssigkeiten oder Gase. Ihre Aufgabe, ganz allgemein aufgefasst, besteht darin, für einen beliebigen Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit einer beliebigen Molekel eines Gases, sowie den Druck, den sie erleidet, und ihre Dichte (und damit also auch die Temperatur) zu bestimmen, wenn die constanten oder stetig sich ändernden Kräfte, welche auf die einzelnen Molekel wirken, und die hinzutretenden oder entweichenden Wärme-Quantitäten, und ausserdem für einen bestimmten Zeitpunkt die Lage sämtlicher Molekel und die Geschwindigkeiten derselben, sowie Druck und Dichte (und mittelbar also auch die Temperatur), in jedem Punkte des von dem Gase erfüllten Raumes gegeben sind.

In der gegenwärtigen Abhandlung werden wir den Ort einer Molekel auf rechtwinklige Koordinatenachsen beziehen. Die Koordinaten sollen durch x, y, z , die nach den Axenrichtungen genommenen Componenten der Geschwindigkeit am Ende der von irgend einer Epoche an gerechneten, durch t bezeichneten Zeit durch u, v, w ausgedrückt werden, während die Geschwindigkeit selbst durch V vorgestellt sein mag. Den Druck oder die Spannung bezeichnen wir durch p , die Dichte durch ρ und die Temperatur durch θ .

Wenn u, v, w, p und ρ als Functionen von x, y, z und t bekannt sind, so erhält man die Gleichungen für die Bewegung und Zustände einer einzelnen Molekel, wenn man nur eine solche Reihe stetig auf einander folgender Punkte der Flüssigkeit betrachtet, dass, wenn x, y, z und $x + dx, y + dy, z + dz$ die Koordinaten zweier unmittelbar auf einander folgender dieser Punkte vorstellen, während u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit im Punkte (x, y, z) sind, dann die Gleichungen

$$dx = u \cdot dt,$$

$$dy = v \cdot dt,$$

$$dz = w \cdot dt$$

bestehen.

Aus diesen Gleichungen werden, wenn man einmal y und z , dann x und z und schliesslich x und y eliminirt, x, y, z als Func-

tionen von t allein erhalten. Durch Substitution dieser Functionen von t für x , y und z in p und ϱ werden dann auch diese Grössen, und mittelbar also auch ϑ , in t allein ausgedrückt gefunden.

§. 2. Aus den allgemeinen dynamischen Gleichungen eines materiellen Punktes, nämlich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} X - \frac{d^2x}{dt^2} &= 0, \\ Y - \frac{d^2y}{dt^2} &= 0, \\ Z - \frac{d^2z}{dt^2} &= 0, \end{aligned}$$

werden die Gleichungen für die Bewegung einer Molekel einer Flüssigkeit (einer elastischen sowohl, als einer tropfbaren Flüssigkeit) erhalten, wenn man für X , Y , Z bezüglich die Summen der nach den Axenrichtungen wirkenden von der Spannung der Flüssigkeit herrührenden Drücke und der Componenten der unabhängig von der Spannung der Flüssigkeit wirkenden Kräfte, auf die Masseneinheit reducirt, setzt. Die in dem Punkte, dessen Koordinaten x , y , z sind, parallel den Koordinatenachsen auf die Flüssigkeitstheilchen wirkenden von der Spannung der Flüssigkeit herrührenden bewegendes Kräfte, auf die Masseneinheit reducirt, sind bezüglich:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dx}, \\ -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dy}, \\ -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dz}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Summen der nach den Richtungen der Koordinatenachsen genommenen Componenten der unabhängig von der Spannung der Flüssigkeit wirkenden Kräfte, ebenfalls auf die Masseneinheit reducirt, bezüglich durch X , Y , Z , so erhalten wir für die Bewegung einer Molekel einer Flüssigkeit die Gleichungen:

$$[1.] \quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dx} = X - \frac{d^2x}{dt^2}; \\ \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dy} = Y - \frac{d^2y}{dt^2}; \\ \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dz} = Z - \frac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

§. 3. Nach der mechanischen Wärmetheorie ist, wenn ein Gas einem äusseren Drucke ausgesetzt ist, welcher dem Drucke des

Gases in jedem Momente gleich ist, und wenn dabei Wärme zu- oder abgeführt wird:

$$[2.] \quad \pm dQ = c \cdot d\vartheta - \frac{AR}{\alpha} (1 + \alpha\vartheta) \cdot \frac{dp}{p} \quad *),$$

wo dQ die Summe der in der unendlichkleinen Zeit dt einer Gewichtseinheit des Gases zugeführten oder entzogenen Wärme-Quantitäten, c die specifische Wärme des Gases bei constantem Druck, A das Wärme-Aequivalent der Arbeitseinheit, α der Ausdehnungs-Koeffizient des Gases, R aber der constante Werth des Ausdrucks $\frac{\alpha p v}{1 + \alpha\vartheta}$ ist, unter v das Volumen einer Gewichtseinheit des Gases bei der Spannung p und der Temperatur ϑ verstanden, so dass, wenn p_0 und v_0 zusammengehörige Werthe für $\vartheta = 0$ sind, auch $R = \alpha p_0 \cdot v_0$ ist. Dabei ist vor dQ das obere Zeichen (+) zu nehmen, wenn Wärme zugeführt, das untere Zeichen (—) aber, wenn Wärme abgeführt wurde.

Endlich ist noch:

$$[3.] \quad p = K \cdot \varrho \cdot (1 + \alpha\vartheta),$$

wo K constant ist.

Aus [2.] und [3.] folgt zunächst:

$$1) \quad \frac{dp}{\varrho} = \frac{K \cdot \alpha}{AR} \cdot (c \cdot d\vartheta \mp dQ).$$

Da $K = \frac{p}{\varrho(1 + \alpha\vartheta)}$, und, wenn g die Acceleration der Schwere

bedeutet, $g \cdot \varrho = \frac{1}{v}$, also $K = \frac{p \cdot g \cdot v}{1 + \alpha\vartheta} = p_0 \cdot g v_0 = \frac{R \cdot g}{\alpha}$ ist, so

hat man $\frac{K\alpha}{AR} = \frac{g}{A}$.

§. 4. Da überhaupt der Druck, den ein Körper auf einen andern Körper ausübt, stets dem Gegendrucke gleich ist, den dabei der erstere Körper von letzterem erleidet, so ist bei einer beliebig in Bewegung oder in Ruhe befindlichen Gasmasse in jedem Punkte der Oberfläche einer beliebigen Molekel dieses Gases in jedem Zeitmomente der von Seiten dieser Molekel auf die angrenzenden Gastheile ausgeübte Druck nothwendig dem Gegendrucke gleich, den die Molekel in diesem Punkte selbst erleidet, und es befindet sich daher jede Molekel der betrachteten Gasmasse in dem für die Gültigkeit der Gleichung [2.] des §. 3 vorausgesetzten Falle. Es kann daher auch die Gleichung 1) des §. 3 auf jede einzelne Molekel

*) Vergl. »Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie« von Dr. Gustav Zeuner. Freiberg 1860.

jener Gasmasse angewendet werden. Dabei ist dann dp das nach allem t genommene Differential von p , also, da p eine Function von x, y, z, t ist,

$$dp = \frac{dp}{dt} \cdot dt + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt + \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} dt + \frac{dp}{dz} \frac{dz}{dt} dt,$$

oder:

$$1) \quad dp = \frac{dp}{dt} \cdot dt + \frac{dp}{dx} \cdot dx + \frac{dp}{dy} \cdot dy + \frac{dp}{dz} \cdot dz,$$

wo $\frac{dp}{dt} \cdot dt$ das partielle Differential von p nach t ist, dx, dy, dz

aber so gedacht werden müssen, dass den Gleichungen

$$2) \quad \begin{cases} dx = u \cdot dt, \\ dy = v \cdot dt, \\ dz = w \cdot dt, \end{cases}$$

Genüge geleistet wird.

§. 5. Addirt man die Gleichungen [1.] des §. 2, nachdem man die erste mit dx , die zweite mit dy und die dritte mit dz multiplicirt hat, so erhält man:

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \left(\frac{dp}{dx} \cdot dx + \frac{dp}{dy} \cdot dy + \frac{dp}{dz} \cdot dz \right) = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \\ - \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot dx + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dy + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot dz \right),$$

und, wenn man für die linke Seite dieser Gleichung den für jenen Ausdruck aus 1) des §. 4 sich ergebenden Werth substituirt:

$$1) \quad \frac{1}{\varrho} \cdot dp - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \\ - \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot dz \right).$$

Setzt man in dieser Gleichung für $\frac{1}{\varrho} \cdot dp$ seinen Werth aus 1) des §. 3, so erhält man die Gleichung:

$$2) \quad \frac{g}{A} \cdot (c \cdot d\vartheta \mp dQ) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt + X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \\ - \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot dx + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dy + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot dz \right),$$

in welcher Gleichung die Differentiale dx, dy, dz so gedacht sind, dass sie den Gleichungen 2) des §. 4 genügen.

Durch die Integration der Gleichung 2) zwischen den Grenzen t_1 und t erhält man für die Bewegung einer Molekel einer elastischen Flüssigkeit die Gleichung

$$3) \quad \frac{g}{A} \cdot [c \cdot (\vartheta - \vartheta_1) \mp (Q - Q_1)] = \int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \\ + \int (Xdx + Ydy + Z \cdot dz) - \frac{1}{2}(V^2 - V_1^2),$$

und hieraus, wenn wir die Masse einer Molekel durch dm bezeichnen, für die Bewegung der Masse $M = \Sigma dm$ eines Gases sofort die Gleichung, in welcher wir einen

neuen Lehrsatz

hiermit aufstellen, nämlich die Gleichung:

$$(I.) \quad \frac{g}{A} \cdot \Sigma [c \cdot (\vartheta - \vartheta_1) \mp (Q - Q_1)] dm = \Sigma \left(\int \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) \\ + \Sigma [\int (Xdx + Ydy + Zdz)] dm - \frac{1}{2} \Sigma (V^2 - V_1^2) dm,$$

wo durch einen Ausdruck mit vorgesetztem Σ die Summe der Werthe angedeutet ist, welche aus diesem Ausdruck hervorgehen, wenn derselbe nach einander für jede in der Masse M enthaltene Molekel genommen wird. Diese Gleichung ist aber, wie man ohne Weiteres einsieht, nothwendig gültig, sowohl, wenn die Integrationsgrenzen t_1 und t für alle Molekel der Masse M dieselben sind, als in dem Falle, wo man diese Integrationsgrenzen für einen Theil oder für die ganze Masse des Gases von dem durchlaufenen Raume abhängig macht, indem man für jede Molekel zu jenen Grenzen die Zeitpunkte nimmt, in welchen diese Molekel bezüglich in einen gewissen Raum eindringt und aus demselben wieder austritt.

Indem wir uns vorbehalten, die Bedeutung des Integral-Ausdruckes $\Sigma \left(\int \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm$ weiter unten (§. 7. 8. und 9.) bei der Discussion der wichtigeren der in der Gleichung (I.) enthaltenen verschiedenen Fälle nachzuweisen, wollen wir vorläufig hier noch einmal daran erinnern, dass in jenem Ausdruck unter $\frac{dp}{dt}$ der partielle Differentialquotient nach dem explicit in p enthaltenen t verstanden, das Integral $\int \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt$ aber nach allem, sowohl explicit, als implicit in $\frac{dp}{dt}$ und ϱ enthaltenen t genommen ist. Es sind nämlich ϱ , p und der partielle Differentialquotient $\frac{dp}{dt}$ Functionen von x , y , z und t , und wenn wir für x , y , z die Functionen von t setzen, welche zu jeder Zeit die Koordinaten des Ortes geben, wo

die Molekel dm sich befindet, so erhalten wir ϱ , p und $\frac{dp}{dt}$, und daher auch den Ausdruck $\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt}$, in t allein ausgedrückt. Es seien nun von den Zeiten $t_1, t_2, t_3, t_4 \dots t$ je zwei unmittelbar auf einander folgende um die unendlichkleine Zeit dt verschieden, so dass $t_2 = t_1 + dt$, $t_3 = t_1 + 2dt$, $t_4 = t_1 + 3dt$ u. s. w., und es seien ferner $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4$ u. s. w. die den Zeiten $t_1, t_2, t_3, t_4 \dots$ entsprechenden Koordinaten, welche den Ort der Molekel dm bestimmen, so ist, wenn $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4 \dots$ $\dots \varrho, \frac{dp_1}{dt}, \frac{dp_2}{dt}, \frac{dp_3}{dt}, \frac{dp_4}{dt} \dots \frac{dp}{dt}$ die jenen Zeiten und Koordinaten zu-

gehörigen Werthe bezüglich von ϱ und $\frac{dp}{dt}$ vorstellen, das Integral

$\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt$ gleich der Summe $\frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{dp_1}{dt} \cdot dt + \frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{dp_2}{dt} \cdot dt + \frac{1}{\varrho_3} \cdot \frac{dp_3}{dt} \cdot dt + \frac{1}{\varrho_4} \cdot \frac{dp_4}{dt} \cdot dt + \dots + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt$, und es ist ferner, wenn $dm', dm'', dm''', dm'''' \dots$ die verschiedenen Molekel sind, welche wir allgemein durch dm vorgestellt haben, und wenn die zugehörigen Werthe von ϱ und $\frac{dp}{dt}$ durch $\varrho', \varrho'', \varrho''', \varrho'''' \dots$ und $\frac{dp'}{dt}, \frac{dp''}{dt}, \frac{dp'''}{dt}, \frac{dp''''}{dt} \dots$ bezeichnet werden, der Werth des Ausdruckes

$$\Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm \text{ gleich der Summe}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varrho'_1} \cdot \frac{dp'_1}{dt} \cdot dt \cdot dm' + \frac{1}{\varrho'_2} \cdot \frac{dp'_2}{dt} \cdot dt \cdot dm' + \frac{1}{\varrho'_3} \cdot \frac{dp'_3}{dt} \cdot dt \cdot dm' + \\ & \quad + \frac{1}{\varrho'_4} \cdot \frac{dp'_4}{dt} \cdot dt \cdot dm' + \dots \\ & + \frac{1}{\varrho''_1} \cdot \frac{dp''_1}{dt} \cdot dt \cdot dm'' + \frac{1}{\varrho''_2} \cdot \frac{dp''_2}{dt} \cdot dt \cdot dm'' + \frac{1}{\varrho''_3} \cdot \frac{dp''_3}{dt} \cdot dt \cdot dm'' + \\ & \quad + \frac{1}{\varrho''_4} \cdot \frac{dp''_4}{dt} \cdot dt \cdot dm'' + \dots \\ & + \frac{1}{\varrho'''_1} \cdot \frac{dp'''_1}{dt} \cdot dt \cdot dm''' + \frac{1}{\varrho'''_2} \cdot \frac{dp'''_2}{dt} \cdot dt \cdot dm''' + \frac{1}{\varrho'''_3} \cdot \frac{dp'''_3}{dt} \cdot dt \cdot dm''' + \\ & \quad + \frac{1}{\varrho'''_4} \cdot \frac{dp'''_4}{dt} \cdot dt \cdot dm''' + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

Das Vorstehende gilt, es mögen die Integrationsgrenzen t_1 und t für die verschiedenen Gasmolekel dm' , dm'' , dm''' dieselben sein oder nicht.

In den wirklich vorkommenden Fällen sind X, Y, Z Functionen von x, y, z , welche nicht zugleich t explicit enthalten. Die Grenzen des Integrals $\int(Xdx + Ydy + Zdz)$ sind die den Grenzwerten von t entsprechenden Werthe von x, y, z .

§. 6. Wir haben bisher den Fall nicht betrachtet, wo zwischen dem Gase und den Wandungen des durchströmten Raumes Stösse vorkommen, und wir haben auch die Reibung des Gases an den Wandungen, sowie die Fälle, wo das Gas, nach dem Durchgange durch Verengerungen, plötzlich von einer grössern in eine kleinere Geschwindigkeit übergeht, ausser Acht gelassen. Durch Einwirkungen und Vorgänge der gedachten Art wird im Allgemeinen ein Theil der lebendigen Kraft des Gases und der etwa in Bewegung befindlichen Masse der Wandungen in Schwingungen der wägbaren Massentheile des Gases und der Wandungen (Vibrationen, zu denen auch die Schallwellen gehören) und in Schwingungen des Aethers (Wärme), sowie, wenn die Begrenzungsfläche des vom Gase durchströmten Raumes zum Theil durch eine Wasseroberfläche gebildet wird, auch in Wirbelbewegungen des Wassers und in Wasserwellen übergeführt und durch Massenumformung (Umbiegen, Zerreißen etc.) verbraucht. Ist $\Sigma N_{(t-t_1)}dm$ die Summe der während des Zeitraums $t - t_1$ in Schwingungen der wägbaren Massentheile und des Aethers, in Wirbelbewegungen des Wassers und in Wasserwellen übergeführten und der durch Massenumformung verbrauchten Quantitäten der lebendigen Kraft der in der Masse $M = \Sigma dm$ enthaltenen Gasmolekel, $\Sigma Q_{(t-t_1)}dm$ aber die ausserdem noch während derselben Zeit durch Stoss auf die Masse der Wandungen übertragene lebendige Kraft jener Gasmolekel, so haben wir in der Gleichung (I.) des §. 5 für den Ausdruck $\frac{1}{2}\Sigma(V^2 - V_1^2)dm$ die Summe $\frac{1}{2}\Sigma(V^2 - V_1^2)dm + \Sigma N_{(t-t_1)}dm + \Sigma Q_{(t-t_1)}dm$ zu setzen. Dadurch erhalten wir:

$$(II'.) \quad \frac{g}{A}\Sigma[c(\vartheta - \vartheta_1) + (Q - Q_1)]dm = \Sigma\left(\int_{\vartheta}^1 \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} dt\right)dm \\ + \Sigma[\int(Xdx + Ydy + Zdz)]dm \\ - \frac{1}{2}\Sigma(V^2 - V_1^2)dm - \Sigma N_{(t-t_1)}dm - \Sigma Q_{(t-t_1)}dm.$$

Die durch Reibung und Stösse erzeugte Wärme wirkt, soweit sie vom Gase aufgenommen wird, natürlicherweise ebenso, wie die von aussen zugeführte Wärme, und ist in dem Werthe des Ausdruckes $g\Sigma(Q - Q_1)dm$ mit inbegriffen.

§. 7. Die Bewegung eines Gases ist innerhalb eines Raumes R eine periodische, wenn die Geschwindigkeit, Spannung und Dichte (und folglich auch die Temperatur) der Gastheilchen in jedem Punkte des Raumes R in je zwei Zeitpunkten, welche um eine bestimmte Zeitintervalle T oder ein Vielfaches derselben von einander entfernt sind, unverändert dieselben sind. Die Begrenzungsflächen des Raumes R, innerhalb dessen die Bewegung des Gases eine periodische ist, haben in den meisten der wirklich vorkommenden Fälle zum Theil, oder sämmtlich, ebenfalls eine periodische Bewegung von der Periode T. Bei der periodischen Bewegung eines Gases ist, wenn man die durch Σ angedeutete Summirung über sämmtliche während einer Periode T aus dem Raume R austretenden Gasmolekel ausdehnt, und zu den Integrationsgrenzen t_1 und t für jede einzelne Molekel bezüglich die Zeit des Eintrittes in den Raum R und die Zeit des Wiederaustrittes aus demselben nimmt,

$$1) \quad \Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \int_{t'}^{t' + T} \left[S \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm \right) \right] dt,$$

sobald der Ausdruck $S \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm \right)$ für jeden beliebigen Zeitpunkt die Summe der Werthe vorstellt, welche erhalten werden, wenn der Ausdruck $\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm$ für jede in jenem Zeitpunkte innerhalb des Raumes R befindliche Gasmolekel genommen wird. Dabei ist t' in dem Ausdrücke rechts des Gleichheitszeichens beliebig.

Wir wollen nun zunächst die Gleichung 1) beweisen.

Es bedeute zuerst t' die Zeit, in deren Endpunkt die betrachtete Periode beginnt, und es sei n eine positive ganze Zahl und so gross, dass ganz gewiss $n \cdot T$ grösser ist als die Zeit, welche irgend eine der Gasmolekel gebraucht, um ihren Weg durch den Raum R zurückzulegen. Da der Bewegungszustand des Gases innerhalb des Raumes R ein periodischer ist von der Periode T, so hat man:

$$a) \quad \int_{t'}^{t' + nT} \left[S \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm \right) \right] dt = n \cdot \int_{t'}^{t' + T} \left[S \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm \right) \right] dt.$$

Nach §. 5 ist

$$\text{b) } \sum \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \left(\frac{1}{\varrho_1'} \cdot \frac{dp_1'}{dt} \cdot dt + \frac{1}{\varrho_2'} \cdot \frac{dp_2'}{dt} \cdot dt + \dots \right) dm' \\ + \left(\frac{1}{\varrho_1''} \cdot \frac{dp_1''}{dt} \cdot dt + \frac{1}{\varrho_2''} \cdot \frac{dp_2''}{dt} \cdot dt + \dots \right) dm'' + \left(\frac{1}{\varrho_1'''} \cdot \frac{dp_1'''}{dt} \cdot dt \right. \\ \left. + \frac{1}{\varrho_2'''} \cdot \frac{dp_2'''}{dt} \cdot dt + \dots \right) dm''' + \dots$$

Stellt daher $\sum \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm$ die Summe aller Glieder vor, welche aus dem Ausdruck $\left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm$ erhalten werden,

wenn man denselben nach einander für jede der Molekel nimmt, welche während des Zeitraums vom Ende der Zeit t' bis zum Ende der Zeit $t' + n \cdot T$ aus dem Raume R austreten, so ist auch, wegen des periodischen Bewegungszustandes:

$$\text{c) } \sum \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = n \cdot \sum \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm.$$

Wir müssen hier daran erinnern, dass die Integrationsgrenzen t_1 und t im Allgemeinen für verschiedene Molekel verschiedene Werthe haben. Die durch t vorgestellte Integrationsgrenze liegt, der hier speciell gemachten Voraussetzung zufolge, innerhalb des Zeitraumes vom Ende der Zeit t' bis Ende der Zeit $t' + n \cdot T$. Die durch t_1 vorgestellte Integrationsgrenze dagegen fällt für diejenigen Molekel, welche am Ende der Zeit t' schon in den Raum R eingetreten waren, ausserhalb jenes Zeitraums, und zwar vor den Anfang desselben. Für diese Molekel ist also $t' > t_1$, und $t' < t$, und daher

$$\text{d) } \int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt = \int_{t'}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt + \int_{t_1}^{t'} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt.$$

Wir können hiernach setzen:

$$\text{e) } \sum \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \sum \left(\int_{t'}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t'} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm + \sum \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm,$$

wo die durch $\overset{\text{I}}{\Sigma}$ angedeutete Summirung sich über diejenigen Molekel erstreckt, welche am Ende der Zeit t' in den Raum R schon eingetreten waren, die durch $\overset{\text{II}}{\Sigma}$ ausgesprochene Summirung aber nur über diejenigen der betrachteten Molekel auszudehnen ist, welche erst nach dem Ende der Zeit t' in den Raum R eingetreten sind. Alle Glieder der nach Gleichung b) unter den beiden Ausdrücken

$$\overset{\text{I}}{\Sigma} \left(\int_{t'}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm \text{ und } \overset{\text{II}}{\Sigma} \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm \text{ zu verstehenden}$$

Summen kommen, weil die Integrationsgrenzen derselben innerhalb des Zeitraums vom Ende der Zeit t' bis Ende der Zeit $t' + n \cdot T$ liegen, nothwendig auch in der unter dem Ausdruck

$$\int_{t'}^{t' + n \cdot T} \left[S \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm \right) \right] dt$$

zu verstehenden Summe vor. Diese letztere enthält aber auch noch andere Glieder, welche von denjenigen Molekeln herrühren, welche am Ende der Zeit $t' + n \cdot T$ noch in dem Raume R befindlich sind, und deren Summe wir durch B bezeichnen wollen. Der Integral-

Ausdruck $\overset{\text{I}}{\Sigma} \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm$, über diese Molekel ausgedehnt, würde eine Summe geben, die folgendermaassen vorgestellt werden könnte:

$$\text{f) } \overset{\text{III}}{\Sigma} \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \overset{\text{III}}{\Sigma} \left(\int_{t' + n \cdot T}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt + \int_{t_1}^{t' + n \cdot T} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm,$$

sobald wir die durch $\overset{\text{III}}{\Sigma}$ ausgesprochene Summirung nur über diejenigen Gasmolekel ausdehnen, welche am Ende der Zeit $t' + n \cdot T$ noch in dem Raume R vorhanden sind. Die Glieder der durch

$$\overset{\text{III}}{\Sigma} \left(\int_{t_1}^{t' + n \cdot T} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm$$

vorgestellten Summe sind aber nothwendig identisch mit den Gliedern der oben erwähnten Summe B. Wir haben daher:

$$\int_{t'}^{t' + n \cdot T} \left[S \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm \right) \right] dt = \sum^I \left(\int_{t'}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm \\ + \sum^{II} \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm + B,$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichung e):

$$g) \quad \int_{t'}^{t' + n \cdot T} \left[S \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm \right) \right] dt = \sum^n \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm \\ - \sum^I \left(\int_{t_1}^{t'} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm + \sum^{III} \left(\int_{t_1}^{t' + n \cdot T} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm.$$

Nun sind aber Spannung, Dichtigkeit, Temperatur und Geschwindigkeit in jedem Punkte des Raumes R am Ende der Zeit $t' + n \cdot T$ genau dieselben, wie am Ende der Zeit t' , und die zu Ende der Zeit $t' + n \cdot T$ noch in dem Raume R befindlichen Molekel haben seit ihrem Eintritt in diesen Raum ganz dieselben Zustände durchlaufen und dieselben Wege beschrieben, wie die am Ende der Zeit t' schon in dem Raume R vorhanden gewesenen Molekel, welche dieselben Stellen einnahmen. Es muss daher nothwendig sein:

$$h) \quad \sum^I \left(\int_{t_1}^{t'} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \sum^{III} \left(\int_{t_1}^{t' + n \cdot T} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm.$$

Darnach folgt dann aus g)

$$i) \quad \int_{t_1}^{t' + n \cdot T} \left[S \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm \right) \right] dt = \sum^n \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm,$$

und also auch, unter Berücksichtigung der Gleichungen a) und c):

$$k) \quad \int_{t'}^{t' + T} \left[S \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm \right) \right] dt = \sum \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm.$$

Da der Ausdruck zur Linken des Gleichheitszeichens in k) seinen Werth nicht ändert, wenn man für t' einen beliebigen andern Werth setzt, während man T ungeändert lässt, so gilt die Gleichung k) allgemein, welches auch der Werth von t' sein mag.

Hiermit ist also die Gleichung 1) bewiesen.

Den vom Gase durchströmten Raum denken wir uns durch Ebenen, die zu den Koordinatenaxen senkrecht sind, in unendlichkleine Parallelepipede getheilt, so dass das Volumen eines solchen Parallelepipeds durch das Produkt $dx \cdot dy \cdot dz$ vorgestellt ist. In dem Ausdruck $S\left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm\right)$ in der Gleichung 1) können wir, wie ohne Weiteres einleuchtet, dm durch das Massenelement $\varrho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ ersetzen, ohne dass dadurch der Werth der Summe $S\left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dm\right)$ geändert wird. Dadurch erhalten wir:

$$1') \quad \sum \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \int_{t'}^{t'+T} \left[S\left(\frac{dp}{dt} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \right) \right] dt.$$

Bei der periodischen Bewegung der Begrenzungsflächen des vom Gase durchströmten Raumes R wird das Gas aus gewissen Raumelementen periodisch verdrängt, und kehrt dahin wieder zurück. Diese Verdrängung und Rückkehr des Gases findet vermittelt steter Aenderungen statt, und die Raumelemente, in welchen sich Gas befindet, sind nicht alle beständig ganz von dem Gase erfüllt; der mit Gas erfüllte Theil eines solchen Raumelementes ist vielmehr eine veränderliche Grösse, welche, je nach der Lage des Elementes, während einer jeden Periode sogar für einige Zeit ganz verschwinden, und für einige Zeit dem Raumelemente selbst gleich sein, also einen dem Produkte $dx \cdot dy \cdot dz$ gleichen Rauminhalt haben wird. Bezeichnen wir die vom Gase erfüllten Theile der Raumelemente durch $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{B}'''$ u. s. w., während p' , p'' , p''' ... die in den betreffenden Raumelementen stattfindenden Spannungen vorstellen sollen, so haben wir:

$$1'') \quad \sum \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \int_{t'}^{t'+T} \left[S\left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B} \right) \right] dt,$$

wenn nur $S\left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B}\right)$ für jeden beliebigen Zeitpunkt die Summe $\frac{dp'}{dt} \cdot \mathfrak{B}' + \frac{dp''}{dt} \cdot \mathfrak{B}'' + \frac{dp'''}{dt} \cdot \mathfrak{B}''' + \dots$, d. i., die Summe der Produkte vorstellt, welche erhalten werden, wenn der von Gas erfüllte Theil eines jeden Raumelementes mit dem nach t genommenen partiellen Differentialquotienten des daselbst stattfindenden Druckes multiplicirt wird.

Es sei $S(p \cdot \mathfrak{B})$ die Summe der Produkte aus den mit Gas erfüllten Theilen der Raumelemente und den in denselben stattfindenden Drücken, so ist $S(p \cdot \mathfrak{B})$ mit der Zeit veränderlich, und man hat

$$\frac{d[S(p \cdot \mathfrak{B})]}{dt} = S\left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) + S\left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B}\right),$$

also

$$2) \quad S\left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B}\right) = \frac{d[S(p \cdot \mathfrak{B})]}{dt} - S\left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right).$$

Da die in der Summe $S(p \cdot \mathfrak{B})$ vorkommenden $p', p'', p''' \dots$ die in den bestimmten Raumelementen $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}''' \dots$ bestehenden Drücke vorstellen, die Koordinaten dieser Raumelemente*) aber constant sind, so können $p', p'', p''' \dots$, welche wir uns als Functionen von x, y, z und t zu denken haben, andere Veränderlichen als t nicht enthalten. Daraus folgt, dass der in dem Ausdruck $S\left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B}\right)$ in der Gleichung 2) vorkommende Differentialquotient $\frac{dp}{dt}$ mit dem partiellen Differentialquotienten von p nach t identisch ist, und dass daher auch die linke Seite der Gleichung 2) mit der in der Gleichung 1'') vorkommenden Summe $S\left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B}\right)$ identisch sein muss.

Durch Substitution des Werthes von $S\left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B}\right)$ aus 2) in die Gleichung 1'') erhält man nun:

$$\Sigma\left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt\right) dm = \int_{t'}^{t'+T} \left\{ \frac{d[S(p \cdot \mathfrak{B})]}{dt} - S\left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) \right\} dt,$$

oder

$$\Sigma\left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt\right) dm = S(p\mathfrak{B})_{t'+T} - S(p\mathfrak{B})_{t'} - \int_{t'}^{t'+T} \left[S\left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) \right] dt,$$

wo $S(p\mathfrak{B})_{t'}$ den Werth der Summe $S(p\mathfrak{B})$ am Ende der Zeit t' , $S(p\mathfrak{B})_{t'+T}$ aber den Werth dieser Summe am Ende der Zeit $t' + T$ vorstellt. Da aber diese beiden Werthe nothwendig gleich sein müssen, weil die Bewegung eine periodische von der Periode T ist, so hat man:

*) Wir verstehen unter den Koordinaten eines der Raumelemente die Koordinaten eines beliebigen Punktes in demselben.

$$3) \quad \Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = - \int_{t'}^{t' + T} \left[S \left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right) \right] dt.$$

Durch die zu den Koordinatenaxen senkrechten Ebenen, welche den Raum in unendlichkleine Parallelepipede theilen, sind auch die beweglichen Begrenzungsflächen des vom Gase erfüllten Raumes R in unendlichkleine Flächenelemente getheilt. Bezeichnen wir dieselben am Ende der beliebig gedachten Zeit t durch ω' , ω'' , $\omega''' \dots$, und sind $d\sigma'$, $d\sigma''$, $d\sigma''' \dots$ die Projectionen der von den Schwerpunkten der Flächenelemente ω' , ω'' , $\omega''' \dots$ während der unendlichkleinen Zeit dt durchlaufenen Wege auf die in diesen Schwerpunkten errichteten Normalen jener Flächenelemente, so ist

$$\begin{aligned} p' \cdot \omega' \cdot d\sigma' + p'' \cdot \omega'' \cdot d\sigma'' + p''' \cdot \omega''' \cdot d\sigma''' + \dots &= \\ = p' \frac{d\mathfrak{B}'}{dt} \cdot dt + p'' \frac{d\mathfrak{B}''}{dt} \cdot dt + p''' \frac{d\mathfrak{B}'''}{dt} \cdot dt + \dots, \end{aligned}$$

oder, wenn die erstere Summe durch $S(p \cdot \omega \cdot d\sigma)$ vorgestellt wird:

$$4) \quad S(p \cdot \omega \cdot d\sigma) = S \left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right) dt.$$

Das Produkt $p \cdot \omega \cdot d\sigma$ aus dem Flächenelement ω , dem auf dasselbe stattfindenden Drucke p und der Projection $d\sigma$ des in der unendlichkleinen Zeit dt von dem Schwerpunkte des Flächenelementes ω beschriebenen unendlichkleinen Weges auf die in diesem Schwerpunkte errichtete Normale des Flächenelementes ist nichts anderes, als die in der Zeit dt von dem Flächenelemente ω unter dem Drucke p des Gases verrichtete Arbeit. Die Summe $S(p \cdot \omega \cdot d\sigma)$ drückt daher die von sämtlichen Begrenzungsflächen des vom Gase erfüllten Raumes in der unendlichkleinen Zeit dt , das Integral

$$4') \quad \int_{t'}^{t' + T} \left[S \left(p \cdot \omega \cdot \frac{d\sigma}{dt} \right) \right] dt = \int_{t'}^{t' + T} \left[S \left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right) \right] dt$$

aber die von denselben Begrenzungsflächen in der endlichen Zeit T , unter dem Drucke des Gases verrichtete Arbeit aus.

Die Arbeit $p \cdot \omega \cdot d\sigma$ ist positiv zu nehmen, wenn die Projection $d\sigma$ ausserhalb des vom Gase erfüllten Raumes fällt, weil dann der Zuwachs $\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \cdot dt$ des an das Flächenelement ω anstossenden Raumelementes $\mathfrak{B}$ positiv ist, negativ aber, wenn $d\sigma$ in jenen Raum fällt, weil dann $\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \cdot dt$ negativ ist.

Aus 3) und 4') folgt:

$$5) \quad \Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = - \int_t^{t'+T} \left[S \left(p \cdot \omega \cdot \frac{d\sigma}{dt} \right) \right] dt.$$

Nach (I') des §. 6 ist, unter Berücksichtigung der Gleichung 5) des gegenwärtigen §., und wenn wir die von den Begrenzungsflächen des vom Gase erfüllten Raumes während der Zeit T unter dem Druck des Gases verrichtete Arbeit durch $L_{(T)}$ bezeichnen, für die periodische Bewegung des Gases während der Periode T:

$$(I'a.) \quad \frac{g}{A} \Sigma [c(\vartheta - \vartheta_1) \mp (Q - Q_1)] dm = \Sigma [\int (Xdx + Ydy + Zdz)] dm \\ - \frac{1}{2} \Sigma (V^2 - V_1^2) dm - L_{(T)} - \Sigma N_{(T)} dm - \Sigma \mathcal{Q}_{(T)} dm,$$

wo die durch Σ angedeutete Summirung sich über die Masse M des Gases erstreckt, welche während einer Periode T aus dem betrachteten Raume R austritt.

Die Gleichung (I'a.) spricht einen speciellen Fall unseres Lehrsatzes aus, welcher in Worten folgendermassen lautet:

Ist der Bewegungszustand eines Gases innerhalb eines Raumes R ein periodischer, und ist M die während einer Periode T aus diesem Raume austretende Gasmasse, so ist die Arbeit, welche die beweglichen Begrenzungsflächen des Raumes R während der Periode T unter dem Drucke des Gases verrichten, gleich der Arbeit, welche die auf die Gasmasse M während des Durchganges derselben durch den Raum R wirkenden Kräfte verrichten, bezüglich vermehrt oder vermindert um das Arbeits-Aequivalent der während dieses Durchganges der Gasmasse M zuströmenden oder aus ihr entweichenden Wärme, bezüglich vermindert oder vermehrt um die Produkte aus der Statt habenden Zu- oder Abnahme der Temperatur einer jeden Gasmolekel, deren Gewicht, dem Arbeits-Aequivalent der Wärmeinheit und der Zahl, welche die specifische Wärme des Gases bei constantem Druck ausdrückt, vermindert um diejenigen Quantitäten lebendiger Kraft, welche in Schwingungen wägbarer Massentheile, in Wirbelbewegungen des Wassers und in Wasserwellen übergeführt, welche in Wärme verwandelt, durch Massen-umformung verbraucht, oder ausser den erwähnten Schwingungen noch durch Stoss auf die Masse der den

Raum R umschliessenden Wandungen übertragen werden, und bezüglich vermindert oder vermehrt um die Quantität des ausser den Schwingungen noch erfolgenden Zuwachses oder Abganges an lebendiger Kraft des Gases.

§. 8. Wenn in dem in (I') des §. 6 vorkommenden Ausdruck

$$\Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm$$

die Integrationsgrenzen t_1 und t für alle Molekel einer Gasmasse $M = \Sigma dm$ dieselben sind, so ist, wie ohne Weiteres einleuchtet:

$$\Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \int_{t_1}^t \left[\Sigma \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \right) dm \right] dt.$$

Nun ist aber offenbar zu jeder Zeit der Werth der Summe $\Sigma \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \right) dm$ gleich dem Werthe der Summe $S \left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B} \right)$, wenn dieselbe über alle Raumelemente $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}''' \dots$ erstreckt wird, welche vom Gase erfüllt sind. Diese Raumelemente sind dabei, wie die in dem vorhergehenden §. betrachteten, im Allgemeinen veränderlich, und der grösste Werth, den ein solches Raumelement annehmen kann, ist $= dx \cdot dy \cdot dz$. Daher ist für eine ganz allgemein, d. i. beliebig gedachte Bewegung eines Gases:

$$1) \quad \Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \int_{t_1}^t \left[S \left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B} \right) \right] dt.$$

Bezeichnet wieder, wie im Vorhergehenden, für einen beliebigen Zeitpunkt der Ausdruck $S(p \cdot \mathfrak{B})$ die Summe der Produkte aus den von der Gasmasse M erfüllten Raumelementen und den in diesen bestehenden Drücken, so ist $S(p \cdot \mathfrak{B})$ mit der Zeit veränderlich, und es ist

$$\frac{d[S(p \cdot \mathfrak{B})]}{dt} = S \left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right) + S \left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B} \right),$$

woraus folgt:

$$2) \quad S \left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B} \right) = \frac{d[S(p \cdot \mathfrak{B})]}{dt} - S \left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung 2) ist mit dem in der Gleichung 1) vorkommenden Ausdruck $S \left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B} \right)$ identisch, weil die in der Summe $S(p \cdot \mathfrak{B})$ vorkommenden Functionen $p', p'', p''', \dots$ andere Veränderlichen als t nicht enthalten können, und daher die in der linken Seite der Gleichung 2), nämlich in der Summe

$$S\left(\frac{dp}{dt} \cdot \mathfrak{B}\right) = \frac{dp'}{dt} \cdot \mathfrak{B}' + \frac{dp''}{dt} \cdot \mathfrak{B}'' + \frac{dp'''}{dt} \cdot \mathfrak{B}''' + \dots$$

vorkommenden Differentialquotienten $\frac{dp'}{dt}, \frac{dp''}{dt}, \frac{dp'''}{dt} \dots$ nichts

Anderes sind, als die partiellen Differentialquotienten von $p', p'', p''' \dots$ nach der Veränderlichen t .

Aus 1) und 2) folgt:

$$\Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \int_{t_1}^t \left\{ \frac{d[S(p\mathfrak{B})]}{dt} - S\left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) \right\} dt,$$

oder

$$3) \quad \Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = S(p \cdot \mathfrak{B})_t - S(p \cdot \mathfrak{B})_{t_1} - \int_{t_1}^t \left[S\left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) \right] dt.$$

Man hat nun wieder, wenn $\omega', \omega'', \omega''' \dots$ die Flächenelemente vorstellen, in welche die Begrenzungsflächen der Gasmasse M durch die zu den Koordinatenachsen senkrechten Ebenen getheilt werden, welche den vom Gase erfüllten Raum in unendlichkleine Parallelipede zerlegen, und wenn $d\sigma', d\sigma'', d\sigma''' \dots$ die Projectionen der von den Schwerpunkten jener Flächenelemente in der unendlichkleinen Zeit dt beschriebenen Wege auf die in diesen Schwerpunkten auf den Flächenelementen errichteten Normalen sind,

$$\left(p' \cdot \frac{d\mathfrak{B}'}{dt} + p'' \cdot \frac{d\mathfrak{B}''}{dt} + p''' \cdot \frac{d\mathfrak{B}'''}{dt} + \dots \right) dt = p' \cdot \omega' \cdot d\sigma' + p'' \cdot \omega'' \cdot d\sigma'' + p''' \cdot \omega''' \cdot d\sigma''' + \dots,$$

oder

$$4) \quad S\left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) \cdot dt = S(p \cdot \omega \cdot d\sigma), \text{ und}$$

$$5) \quad \int_{t_1}^t \left[S\left(p \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) \right] dt = \int_{t_1}^t \left[S\left(p \cdot \omega \cdot \frac{d\sigma}{dt}\right) \right] dt,$$

wobei wieder zu berücksichtigen ist, dass $p\omega \cdot d\sigma$ positiv genommen werden muss, wenn $d\sigma$ ausserhalb des vom Gase erfüllten Raumes fällt, negativ aber, wenn $d\sigma$ innerhalb dieses Raumes liegt. Die Summe $S(p \cdot \omega \cdot d\sigma)$ ist die in der unendlichkleinen Zeit dt , das Integral

$$\int_{t_1}^t \left[S\left(p \cdot \omega \cdot \frac{d\sigma}{dt}\right) \right] dt \text{ die in der endlichen Zeit } t - t_1 \text{ durch die Be-}$$

grenzungsflächen der Gasmasse M unter dem Drucke des Gases verrichtete Arbeit, und wenn wir die letztere durch $L_{(t-t_1)}$ bezeichnen, so haben wir

$$6) \quad \Sigma \left(\int_{t_1}^t \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = S(p \cdot \mathfrak{B})_t - S(p \cdot \mathfrak{B})_{t_1} - L_{(t-t_1)}.$$

Die Gleichung (I.) des §. 6 gibt daher in Verbindung mit der vorstehenden Gleichung für die beliebige Bewegung einer Gasmasse $M = \Sigma dm$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} 7) \quad & \frac{g}{A} \cdot \Sigma [c \cdot (\vartheta - \vartheta_1) \mp (Q - Q_1)] dm = \\ & = \Sigma [\int (Xdx + Ydy + Z \cdot dz)] dm \\ & - \frac{1}{2} \Sigma (V^2 - V_1^2) dm + S(p \mathfrak{B})_t - S(p \cdot \mathfrak{B})_{t_1} \\ & - L_{(t-t_1)} - \Sigma N_{(t-t_1)} dm - \Sigma \mathfrak{L}_{(t-t_1)} dm, \end{aligned}$$

unter der Bedingung, dass die Integrationsgrenzen für alle Molekel der Masse M denselben Zeitpunkten angehören.

Der Ausdruck $g \Sigma (Q - Q_1) dm$ stellt die der Gasmasse M während der Zeit $t - t_1$ zugeführte oder entzogene Wärme, der Ausdruck $\Sigma [\int (Xdx + Ydy + Zdz)] dm$ die während derselben Zeit von den auf die Gasmasse einwirkenden Kräften verrichtete Arbeit, die Summe $\frac{1}{2} \Sigma (V^2 - V_1^2) dm$ den Zuwachs der Gasmasse M an lebendiger Kraft, $\Sigma N_{(t-t_1)} dm$ die Summe der während der Zeit $t - t_1$ in Schwingungen wägbarer Massentheile, in Wasserwirbel und in Wasserwellen übergeführten, der in Wärme verwandelten und der durch Massenumformung verbrauchten Quantitäten an lebendiger Kraft des Gases, $\Sigma \mathfrak{L}_{(t-t_1)} dm$ die während dieser Zeit noch, ausser jenen Schwingungen etc., durch Stoss auf die Masse der Wandungen übertragene lebendige Kraft des Gases, $\vartheta - \vartheta_1$ aber die Temperatur-Änderung einer beliebigen Molekel dm während der Zeit $t - t_1$ vor.

Es ist aber $p = K\varrho(1 + \alpha\vartheta)$, $p_1 = K\varrho_1(1 + \alpha\vartheta_1)$, und daher $S(p\mathfrak{B})_t = KS[\varrho(1 + \alpha\vartheta)\mathfrak{B}]_t$, $S(p\mathfrak{B})_{t_1} = KS[\varrho_1(1 + \alpha\vartheta_1)\mathfrak{B}]_{t_1}$.

Da die Masse des Gases unverändert geblieben ist, so haben wir $S(\varrho\mathfrak{B})_t = S(\varrho_1\mathfrak{B})_{t_1}$, und da nach der von uns angewendeten Bezeichnung allgemein $S(\varrho\mathfrak{B}) = \Sigma dm$ ist, so folgt:

$$\begin{aligned} S(p\mathfrak{B})_t &= K \cdot \Sigma (1 + \alpha\vartheta) dm, \\ S(p\mathfrak{B})_{t_1} &= K \cdot \Sigma (1 + \alpha\vartheta_1) dm, \end{aligned}$$

und daher

$$8) \quad S(p\mathfrak{B})_t - S(p\mathfrak{B})_{t_1} = K\alpha \Sigma (\vartheta - \vartheta_1) dm.$$

Substituirt man den Werth von $S(p\mathfrak{B})_t - S(p\mathfrak{B})_{t_1}$ aus der Gleichung

8) in die Gleichung 7), so erhält man, wenn noch $\frac{gc}{A} - K\alpha = \frac{gc_1}{A}$, also $c_1 = c - \frac{KA\alpha}{g}$, oder, mit Berücksichtigung des §.3, $c_1 = c - AR$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \text{(I'b.)} \quad \frac{g}{A} \cdot \Sigma [c_1(\vartheta - \vartheta_1) + (Q - Q_1)] dm = \\ = \Sigma [f(Xdx + Ydy + Zdz)] dm \\ - \frac{1}{2} \Sigma (V^2 - V_1^2) dm - L_{(t-t_1)} \\ - \Sigma N_{(t-t_1)} dm - \Sigma \mathcal{E}_{(t-t_1)} dm. \end{aligned}$$

Bestimmt man mittelst dieser Gleichung (I'b.) die Wärmequantität q , welche einer Gewichtseinheit des Gases von der beliebigen Temperatur ϑ_1 zugeführt werden muss, damit die Temperatur um 1 Grad Cels. steige, wenn die Luft von festen Wandungen umschlossen ist, so dass ihr Volumen sich nicht ändern kann, und unter der Voraussetzung, dass Spannung und Dichtigkeit in verschiedenen Punkten innerhalb des von dem Gase eingenommenen Raumes nicht merklich verschieden seien (was z. B. angenommen werden darf, wenn der Raum in vertikaler Richtung durch zwei einander sehr nahe liegende horizontale Ebenen begrenzt ist), so findet man $q = c_1$. Denn da nach der Voraussetzung $\vartheta - \vartheta_1$ für alle Molekel des Gases denselben Werth hat, und $V_1 = V = 0$, und, weil die Wandungen fest sind, $L_{(t-t_1)} = 0$ und $\Sigma \mathcal{E}_{(t-t_1)} dm = 0$ sein muss, und da ferner unter den gemachten Voraussetzungen eine merkliche Bewegung der Gasmolekel nicht statt haben kann, also auch $\Sigma N_{(t-t_1)} dm = 0$ und $\Sigma [f(Xdx + Ydy + Zdz)] dm = 0$ zu setzen ist, und endlich $Q - Q_1$ für alle Molekel des Gases denselben Werth haben, und daher $\Sigma (Q - Q_1) dm = (Q - Q_1) \Sigma dm$ sein muss, so findet man,

$$c_1(\vartheta - \vartheta_1) = Q - Q_1$$

und, da im vorliegenden Falle $\vartheta - \vartheta_1 = 1$, und $Q - Q_1 = q$ ist,

$$q = c_1.$$

Die Grösse q wird die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen genannt. Dieselbe wird also durch die Zahl c_1 ausgedrückt.

Der durch die Gleichung (I'b.) ausgesprochene Satz lautet in Worten:

Bei einer beliebigen Bewegung einer Gasmasse M ist die Arbeit, welche die Begrenzungsflächen dieser Gasmasse unter dem Drucke des Gases während der Zeit $t - t_1$ verrichten, gleich der Arbeit, welche die

auf die Gasmasse wirkenden Kräfte während dieser Zeit verrichten, bezüglich vermehrt oder vermindert um das Arbeits-Aequivalent der Wärme, welche der Gasmasse M während dessen zugeführt oder entzogen wird, bezüglich vermindert oder vermehrt um die Produkte aus der Zu- oder Abnahme der Temperatur einer jeden Gasmolekel, deren Gewicht, der specifischen Wärme des Gases bei constantem Volumen, und dem Arbeits-Aequivalent der Wärmeeinheit, vermindert um diejenigen Quantitäten lebendiger Kraft, welche in Schwingungen wägbarer Massentheile, in Wirbelbewegungen des Wassers und in Wasserwellen übergeführt, welche in Wärme verwandelt, durch Massenumformung verbraucht, oder ausser den erwähnten Schwingungen noch durch Stoss auf die Masse der begrenzenden Wandungen übertragen werden, und bezüglich vermindert oder vermehrt um die Quantität der ausser den Schwingungen noch erfolgenden Zu- oder Abnahme an lebendiger Kraft des Gases.

§. 9. Man sieht leicht ein, dass, wenn wieder unter $\frac{dp}{dt}$ der partielle Differentialquotient von p nach t verstanden wird, auch noch ist,

$$1) \quad \Sigma \left(\int \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = \int \left[\Sigma \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \right) dm \right] dt,$$

wenn auf der linken Seite dieser Gleichung die Integrationsgrenzen nur für einen Theil $\Sigma' dm$ der in der Masse Σdm enthaltenen Gasmolekel gemeinschaftlich, für einen andern Theil $\Sigma'' dm$ jener Masse aber im Allgemeinen verschieden sind, sobald die unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite der Gleichung 1) stehende Summe $\Sigma \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \right) dm$ sich zu jeder Zeit nur über diejenigen Molekel der Masse Σdm erstreckt, deren Integrationsgrenzen diesen Zeitpunkt einschliessen. Als Integrationsgrenzen des Ausdruckes

$$\int \left[\Sigma \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \right) dm \right] dt$$

sind dann die äussersten Grenzen des Integrals auf der linken Seite der Gleichung 1), welche Grenzen wir durch τ_1 und τ bezeichnen wollen, zu nehmen.

Wir wollen, um einen bestimmten Fall zu behandeln, die Bewegung eines Gases innerhalb einer Raumes R betrachten, und voraussetzen, dass sich am Ende der Zeit τ_1 nur die Gasmasse $\Sigma' dm$

in dem Raume R befinde, und dass während der Zeit $\tau - \tau'$ noch die Masse $\Sigma'' dm$ hinzutrete, ein anderer Theil $\Sigma''' dm$ des Gases aber während dieser Zeit aus dem Raume R wieder austrete. Für die Bewegung des Gases während des Zeitraums $\tau - \tau_1$ finden wir nun wieder durch dieselben Schlüsse, wie in dem vorhergehenden §.,

$$\int_{\tau_1}^{\tau} \left[\Sigma \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \right) dm \right] dt = S(p \cdot \mathfrak{B})_{\tau} - S(p \cdot \mathfrak{B})_{\tau_1} - L_{(\tau - \tau_1)},$$

also auch

$$2) \quad \Sigma \left(\int_{\tau_1}^{\tau} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm = S(p \cdot \mathfrak{B})_{\tau} - S(p \cdot \mathfrak{B})_{\tau_1} - L_{(\tau - \tau_1)},$$

wo die Bezeichnung dieselbe ist, wie in §. 8, nur mit der Aenderung, dass wir jetzt τ_1 und τ statt bezüglich t_1 und t geschrieben haben.

Aus Gleichung (I.) §. 6 und Gleichung 2) des gegenwärtigen §. erhält man nun:

$$\begin{aligned} (\text{I'c.}) \quad \frac{g}{A} \Sigma [c(\vartheta - \vartheta_1) \mp (Q - Q_1)] dm &= \Sigma [\int (Xdx + Ydy + Zdz)] dm \\ &\quad - \frac{1}{2} \Sigma (V^2 - V_1^2) dm + S(p \cdot \mathfrak{B})_{\tau} - S(p \cdot \mathfrak{B})_{\tau_1} \\ &\quad - L_{(\tau - \tau_1)} - \Sigma N_{(\tau - \tau_1)} dm - \Sigma \mathfrak{Q}_{(\tau - \tau_1)} dm. \end{aligned}$$

Dabei sind die Grenzwerte ϑ_1 , ϑ , Q_1 , Q , V_1 und V , sowie die Integrationsgrenzen der Ausdrücke $\Sigma [\int (Xdx + Ydy + Zdz)] dm$, $\Sigma N_{(\tau - \tau_1)} dm$ und $\Sigma \mathfrak{Q}_{(\tau - \tau_1)} dm$, für jede Gasmolekel den Integrationsgrenzen des Ausdruckes auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in 1) des gegenwärtigen §. gemäss zu nehmen.

Der im Vorstehenden hingestellte Fall unseres Lehrsatzes lässt sich folgendermassen aussprechen:

Die Arbeit, welche die beweglichen Begrenzungsflächen eines von Gas erfüllten Raumes R unter dem Drucke des Gases während der Zeit $\tau - \tau_1$ verrichten, es mag nun während dieser Zeit Gas in den Raum R einströmen, oder aus demselben austreten, oder ein Einströmen und Ausströmen von Gas zugleich Statt haben, ist gleich der Arbeit, welche die auf das Gas wirkenden Kräfte während des innerhalb der Zeit $\tau - \tau_1$ liegenden Verweilens des Gases im Raume R verrichten, bezüglich vermehrt oder vermindert um das Arbeitsäquivalent der Wärme, welche dem Gase im Raume R während der Zeit $\tau - \tau_1$ zugeführt oder entzogen wird,

vermehrt um die Summe der Produkte aus den am Ende der Zeit τ in R enthaltenen Raumelementen und den darin bestehenden Spannungen des Gases, vermindert um die Summe der Produkte aus den am Ende der Zeit τ_1 von R umfassten Raumelementen und den zugehörigen Spannungen, bezüglich vermindert oder vermehrt um die Produkte aus der Zu- oder Abnahme der Temperatur einer jeden Gasmolekel, deren Gewicht, der specifischen Wärme des Gases bei constantem Druck, und dem Arbeits-Aequivalent der Wärmeeinheit, vermindert um diejenigen Quantitäten lebendiger Kraft, welche in Schwingungen wägbarer Massentheile, in Wirbelbewegungen des Wassers und in Wasserwellen übergeführt, welche in Wärme verwandelt, durch Massenumformung verbraucht, oder ausser den erwähnten Schwingungen noch durch Stoss auf die Masse der den Raum R umschliessenden Wandungen übertragen werden, und bezüglich vermindert oder vermehrt um die Quantität des ausser den Schwingungen noch erfolgenden Zuwachses oder Verlustes an lebendiger Kraft des Gases.

Wenn der hier geschilderte Bewegungszustand ein periodischer ist, so hat man, unter $\tau - \tau_1$ die Dauer einer Periode oder eines Vielfachen derselben verstanden, ebenso wie in §. 7, $S(p.\mathfrak{B})_\tau = S(p.\mathfrak{B})_{\tau_1}$, und die Gleichung (I'c.) ist dann von der Gleichung (I'a.) in §. 7 nicht verschieden.

Der Lehrsatz des gegenwärtigen §. ist überhaupt der allgemeinere, in welchem die Lehrsätze der §§. 7 und 8 als besondere Fälle enthalten sind.

§. 10. Wir wollen nun mit Hülfe unseres neuen Lehrsatzes einige Aufgaben lösen. Wir nehmen dabei die positive Hälfte der Axe der x in der der Richtung der Schwere entgegengesetzten Richtung.

I. Aufgabe.

Ein von festen Flächen begrenzter Raum R_1 ist mit einem Gase von der Spannung p_1 und der Temperatur ϑ_1 erfüllt; derselbe wird mit einem ebenfalls von festen Flächen begrenzten leeren Raume R_2 in Verbindung gesetzt, so dass das Gas aus dem ersten Raum in den zweiten überströmen und sich in beiden Räumen verbreiten kann. Es wird vorausgesetzt, dass die Wandungen der Räume R_1

und R_2 für Wärme undurchdringlich seien, und dass die Grösse $\Sigma N_{(t-t_1)} dm$ so klein sei, dass dieselbe ausser Acht gelassen werden darf, wonach dann noch $dQ = 0$ zu setzen ist. Welche Temperatur besitzt das Gas nach seiner Verbreitung in den beiden Räumen?

Auflösung.

Wir haben hier, unter g die Acceleration der Schwere verstanden, $X = -g$, und, da andere Kräfte nicht einwirken, $Y = Z = 0$.

Wenn t_1 den Zeitpunkt bezeichnet, in welchem die Communication der beiden Räume hergestellt wurde, t aber den Zeitpunkt angibt, in welchem das Gas, nach der Verbreitung in den beiden Räumen, wieder in Ruhe ist, so erhält man aus der Gleichung (Ib.) des §. 8, wenn man berücksichtigt, dass nach der Voraussetzung $Q - Q_1 = 0$, und dass die Anfangsgeschwindigkeit des Gases, als die Strömung von R_1 nach R_2 begann, Null war, also $V_1 = 0$, und dass ebenfalls die Endgeschwindigkeit $V = 0$ ist:

$$\frac{gc_1}{A} \cdot \Sigma (\vartheta - \vartheta_1) dm = -g \Sigma (\int dx) dm - L_{(t-t_1)} - \Sigma \vartheta_{(t-t_1)} dm.$$

Da das Gas in einen leeren Raum einströmte, so war an der beweglichen Begrenzungsfläche der Gasmasse beständig $p = 0$, und es ist daher auch $L_{(t-t_1)} = 0$. Endlich ist, weil die Begrenzungsflächen der Räume R_1 und R_2 nicht beweglich sind, auch nothwendig $\Sigma \vartheta_{(t-t_1)} dm = 0$.

Danach haben wir:

$$1) \quad \frac{c_1}{A} \cdot \Sigma (\vartheta - \vartheta_1) dm = -\Sigma (\int dx) dm.$$

Es ist hier $\int dx = x - x_1$, wenn unter x_1 und x die den Grenzen t_1 und t entsprechenden Grenzwerte von x verstanden werden, und daher, wenn x'_1 und x' die vertikalen Koordinaten des Schwerpunktes der Gasmasse bezüglich am Ende der Zeit t_1 und am Ende der Zeit t vorstellen,

$$\Sigma (\int dx) dm = \Sigma (x - x_1) dm = (x' - x'_1) \cdot \Sigma dm.$$

Daher ist:

$$\frac{c_1}{A} \cdot \Sigma (\vartheta - \vartheta_1) dm = -(x' - x'_1) \Sigma dm.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen muss am Ende der Zeit t auch die Temperatur ϑ in allen Punkten der beiden Räume R_1 und R_2 dieselbe sein, und da auch die Temperatur ϑ_1 für alle Molekel der Gasmasse dieselbe war, so ist $\Sigma (\vartheta - \vartheta_1) dm = (\vartheta - \vartheta_1) \Sigma dm$. Daher hat man:

$$\frac{c_1}{A} \cdot (\vartheta - \vartheta_1) = -(x' - x'_1),$$

oder

$$2) \quad \vartheta = \vartheta_1 - \frac{A}{c_1} (x' - x_1').$$

Für den Fall, dass $x' = x_1'$ wäre, hätte man

$$\vartheta = \vartheta_1.$$

Wenn also der Schwerpunkt der in den Räumen R_1 und R_2 verbreiteten Gasmasse in demselben Niveau liegt, in welchem der Schwerpunkt der Gasmasse lag, als sie den Raum R_1 allein erfüllte, so ist die Temperatur des Gases nach seiner Verbreitung in den communicirenden Räumen R_1 und R_2 dieselbe wie im Anfange.

Die Grösse $\frac{A}{c_1}$ ist positiv, und wenn daher $x' > x_1'$, so ist $\vartheta < \vartheta_1$; ist dagegen $x' < x_1'$, so ist $\vartheta > \vartheta_1$.

II. Aufgabe.

Aus einem Gasreservoir mit festen und für Wärme undurchdringlichen Wänden ströme Gas durch eine verhältnissmässig sehr kleine Oeffnung aus, während durch eine andere ebenfalls verhältnissmässig kleine Oeffnung wieder eine gleiche Masse Gas zugeführt wird. Da das Reservoir im Verhältniss zur Ausflussöffnung, wie zur Einflussöffnung, sehr gross ist, so darf der Bewegungszustand des Gases innerhalb des Reservoirs als ein constanter betrachtet, d. h. es dürfen Spannung, Dichte (und daher auch die Temperatur) und Geschwindigkeit in jedem Punkte des Reservoirs als constant angenommen werden. Es ist unter der Voraussetzung, dass die Grösse $\Sigma N_{(t-t_1)} dm$, als sehr klein, ausser Acht gelassen werden könne, die Temperatur des Gases an der Mündung der Ausflussöffnung zu berechnen, wenn die Geschwindigkeit des ausströmenden Gases an dieser Stelle gegeben ist?

Auflösung.

Der hier vorausgesetzte Bewegungszustand kann als ein periodischer betrachtet werden, bei welchem die Periode T unendlichklein ist, so dass jede endliche Zeit $t - t_1$ als ein Vielfaches der Periode T angesehen werden darf. Aus der Gleichung (I'a.) des §.7 erhält man dann, indem man an die Stelle von T die Zeit $t - t_1$ setzt, und wenn man berücksichtigt, dass die Begrenzungsflächen des Reservoirs unbeweglich sind, und dass daher $L_{(t-t_1)} = 0$ und $\Sigma \varrho_{(t-t_1)} dm = 0$ sein muss, und wenn man ferner für den Ausdruck $\int (Xdx + Ydy + Zdz)$ seinen Werth $-g(x - x_1)$ setzt, und berücksichtigt, dass im vorliegenden Falle $Q - Q_1 = 0$ ist:

$$1) \quad \frac{gc}{A} \Sigma (\vartheta - \vartheta_1) dm = -g \Sigma (x - x_1) dm - \frac{1}{2} \Sigma (V^2 - V_1^2) dm,$$

wo die durch Σ angedeutete Summirung sich über die während der Zeit $t - t_1$ ausströmenden Gasmolekel erstreckt, ϑ_1 und V_1 bezüglich die Temperatur und Geschwindigkeit des Gases an der Stelle des Eintrittes in das Reservoir, ϑ und V die Temperatur und Geschwindigkeit an der Mündung der Ausflussöffnung vorstellen, x_1 und x aber bezüglich die Abscissen des Ein- und Austrittspunktes sind.

Dieselbe Gleichung 1) wird auch direct aus der Gleichung (I') des §. 6 erhalten, wenn man die für einen constanten Bewegungszustand des Gases bestehende Bedingungsgleichung $\frac{dp}{dt} = 0$ berücksichtigt, unter $\frac{dp}{dt}$ den partiellen Differentialquotienten von p nach t verstanden.

Wir setzen voraus, dass für alle Molekel ϑ_1 und V_1 sowohl, als ϑ und V dieselben Werthe haben. Dann haben wir nach 1)

$$\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1) \Sigma dm = -g \Sigma (x - x_1) dm - \frac{1}{2} (V^2 - V_1^2) \Sigma dm,$$

und es ist, wenn x_1' und x' bezüglich die Abscissen der Schwerpunkte einer an der Eintrittsöffnung und einer an der Mündung der Ausflussöffnung genommenen, zwischen Querschnitten des Gasstromes liegenden unendlichdünnen Gasschicht vorstellen, so dass

$$\Sigma (x - x_1) dm = (x' - x_1') \Sigma dm$$

ist,

$$\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1) = -g(x' - x_1') - \frac{1}{2} (V^2 - V_1^2),$$

woraus

$$2) \quad \vartheta = \vartheta_1 - \frac{A}{c} (x' - x_1') - \frac{A}{2gc} \cdot (V^2 - V_1^2)$$

gefunden wird.

Wäre z. B. $x' - x_1' = 25$ Fuss, $V_1 = 10$ Fuss, $V = 250$ Fuss, $\vartheta_1 = 20^\circ$ Cels., so hätte man, da $c = 0,2377$, und für preussisches Maass und Gewicht $A = \frac{1}{1351}$, und $g = 31,25$ ist,

$$\vartheta = 20 - \frac{1}{1351 \times 0,2377} \cdot 25 - \frac{62500 - 100}{2 \times 1351 \times 0,2377 \times 31,25},$$

oder

$$\vartheta = 16^{\circ,8132} \text{ Cels.}$$

Für $V = 600$ Fuss findet sich unter übrigens gleichen Verhältnissen $\vartheta = 1^{\circ,9907} \dots$ Cels.

§. 11. Hiernach wollen wir von unserem Lehrsatz eine Anwendung auf die Theorie der Maschinen machen. Es kommen hierbei sowohl die Maschinen in Betracht, welche die Fortbewegung, Verdichtung oder Verdünnung der Luft zum Zwecke haben, als die calorischen Maschinen, bei welchen die Luft der Motor ist.

Die Axe der x sei wieder senkrecht und ihre positive Halbaxe aufwärts gerichtet. Wir haben sodann, wie in §. 10,

$$X = -g, \quad Y = Z = 0.$$

Wenn eine in Bewegung befindliche Maschine im Beharrungszustande ist, so ist die Bewegung der durch diese Maschine hindurch strömenden Luft eine periodische*), und es gilt dann für die Bewegung der Luft die Gleichung (I'a.) des §. 7. Unter dieser Voraussetzung ist daher für die oben erwähnten Maschinen, wenn T die Zeit eines Umganges derselben bedeutet:

$$\begin{aligned} 1) \quad -(L_{(T)} + \Sigma Q_{(T)} dm) &= \frac{g}{A} \Sigma [c(\vartheta - \vartheta_1) \mp (Q - Q_1)] dm \\ &+ g \Sigma (x - x_1) dm + \frac{1}{2} \Sigma (V^2 - V_1^2) dm \\ &+ \Sigma N_{(T)} dm. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung bedeuten die Ausdrücke mit vorgesetztem Σ die Summe der Werthe, welche diese Ausdrücke für die während eines Umganges der Maschine aus dieser austretenden Luftmolekel annehmen, x_1 und x sind die vertikalen Koordinaten, bezüglich der Stelle des Eintrittes einer beliebigen Luftmolekel in die Maschine und des Austrittes aus derselben, ϑ_1 , ϑ , V_1 , V aber die Temperaturen und Geschwindigkeiten der Molekel, bezüglich beim Eintritt in die Maschine und beim Austritt aus derselben. Der Werth des Ausdruckes $g \Sigma (Q - Q_1) dm$ ist gleich der Zahl, welche die Quantität der während der Zeit T eines Umganges der Maschine der Luft innerhalb jener zugeführten oder durch Ableitung entzogenen Wärme ausdrückt.

*) Wenn die Bewegung der Maschine noch nicht im Beharrungszustande ist, so ist die Bewegung der Luft innerhalb der Maschine noch nicht periodisch, und es ist alsdann die Gleichung (I'c.) §. 9 anzuwenden. Wenn Luft aus einem Behälter ausgepumpt wird, ohne dass dieselbe aus einem andern Raume sich wieder ersetzt, so wird die in dem Behälter noch befindliche Luft beständig dünner, und die Dichtigkeit der in die Maschine eintretenden Luft ist in jedem folgenden Zeitpunkte geringer, als in einem vorhergegangenen Zeitpunkte; die Bewegung der Luft ist daher keine periodische, und es muss die Gleichung (I'c.) §. 9 angewendet werden. Ebenso ist die Bewegung der Luft keine periodische, wenn Luft in einen Raum hinein getrieben wird und nicht aus demselben entweichen kann.

Für die calorischen Maschinen ist diese Quantität der Ueberschuss der durch die Feuerung während der Zeit T der Luft innerhalb der Maschine zugeführten Wärme und des von dieser Luft aufgenommenen Theiles der durch Reibung und Stösse erzeugten Wärme über die während dessen von derselben Luftmasse an die Maschine abgegebene Wärme. Bezeichnet man letztere durch $U_{(T)}$, die durch die Feuerung der Luft zugeführte Wärme durch $W'_{(T)}$, den von der Luft innerhalb der Maschine aufgenommenen Theil der durch Reibung und Stösse erzeugten Wärme durch $W''_{(T)}$, so ist, wenn noch $W_{(T)} = W'_{(T)} + W''_{(T)}$ gesetzt wird,

$$2) \quad W_{(T)} = g \Sigma (Q - Q_1) dm + U_{(T)}.$$

Bei der Verdichtung der Luft in den Gebläsemaschinen nimmt jene eine höhere Temperatur an und es wird in Folge dessen auch die Maschine erwärmt, und dieselbe giebt dann Wärme nach aussen ab. Es wird dadurch der Luft innerhalb der Maschine Wärme entzogen. Für solche Maschinen ist $g \Sigma (Q - Q_1) dm$ gleich dem Ueberschusse der von der Luftmasse Σdm an die Maschine abgegebenen Wärme über den von derselben Luftmasse in der Maschine aufgenommenen Theil der durch Reibung und Stösse erzeugten Wärme.

Für die calorischen Maschinen ist die Summe $L_{(T)} + \Sigma \mathfrak{L}_{(T)} dm$ positiv und drückt die während eines Umganges von der Luft auf die Maschine übertragene Arbeit aus. Für die Gebläse- und Wettermaschinen rechnet sich $L_{(T)} + \Sigma \mathfrak{L}_{(T)} dm$ negativ aus, und die von der Kolbenfläche (bei Kolbenmaschinen), durch die Schaufeln und Flügel (bei Ventilatoren und Wetterrädern) u. s. w. während der Zeit T verrichtete Arbeit ist dann $= - (L_{(T)} + \Sigma \mathfrak{L}_{(T)} dm)$.

Wir haben bereits in §. 6 im Allgemeinen erwähnt, dass nach vorgekommenen Erschütterungen etc. ein Theil der lebendigen Kraft sich in Schwingungen der wägbaren Atome und des Aethers, in Wirbelbewegungen des Wassers und in Wasserwellen wiederfindet. Dieser Theil der lebendigen Kraft ist bis auf die sehr kleine Quantität, durch welche die von der Luft in der Maschine aufgenommene Wärme erzeugt worden ist, für den Zweck der Maschine verloren. Entstehen bei solchen Stössen Wirbelbewegungen der Luft, und entweicht dieselbe mit jenen Bewegungen aus der Maschine, so entsteht auch noch dadurch ein Effectverlust, indem in der wirbelnden und zugleich mit progressiver Geschwindigkeit fortgehenden Luft eine grössere Quantität an lebendiger Kraft enthalten

ist, als darin enthalten sein würde, wenn diese Luft nur die progressive Bewegung hätte. Diesen Effectverlust wollen wir in dem Ausdruck $\Sigma N_{(T)} dm$ mitbegreifen.

In Kniestücken und Krümmungen einer Röhre findet eine Contraktion des durchgehenden Luftstromes Statt und es füllt sich dabei an der concaven Seite des Axenschnittes des Rohres ein Theil dieses letzteren mit wirbelnder Luft. In dem kleineren Querschnitte des zusammengezogenen Luftstromes ist die Geschwindigkeit der Luft grösser als in der darauf folgenden Partie des Luftstromes, wo derselbe wieder den ganzen Querschnitt der Röhre füllt. Der Uebergang von der grössern Geschwindigkeit zu der kleineren erfolgt hier sehr schnell und es entstehen daher, wie schon in §. 6 erwähnt, Schwingungen der Luft und dadurch Effectverluste für die Maschine. Effectverluste dieser Art sind aber schon in dem Ausdrucke $\Sigma N_{(T)} dm$ mit inbegriffen.

In Folge undichten Abschiessens der Ventile etc. entweicht ein Theil der in die Maschine eingetretenen Luft auf Nebenwegen und es tritt bei Kolbengebläsen beim Rückgange des Kolbens ein Theil des vorher ausgeblasenen Windes ans dem Regulator in den Gebläsecylinder zurück. Auch wird bei dem Zuschlagen der Ventile schon ein Theil der bereits durch die Ventilöffnungen getretenen Luft wieder zurückgetrieben. Aehnliches findet bei andern Maschinen statt. Bei dem Fabryschen Wetterrad z. B. wird Luft aus der freien Atmosphäre durch die Maschine in den Wetterzuführungsraum mitgeführt. Die lebendige Kraft und die Wärme, welche der aus einer Gebläsemaschine auf Nebenwegen entweichenden, oder der durch die Saugöffnung wieder zurücktretenden Luft innerhalb der Maschine ertheilt worden sind, gehen für den Nutzeffect verloren. Ebenso verhält es sich bei einem Wettersauger bezüglich der durch die Saugöffnung zurückströmenden Luft. Bei einem Gebläse wird durch das Zurücktreten von Luft aus dem Regulator in den Gebläsecylinder das während eines Kolbenhubes von der Maschine gelieferte Windquantum vermindert, während die Reibung der Maschinentheile unter sich keine Verminderung erfährt, so dass auch hierdurch ein Effectverlust entsteht.

Wenn bei einem zum Saugen dienenden Ventilator der Luftstrom bei seinem Austritt aus der Maschine die Ausflussöffnungen nicht ganz ausfüllt, so werden durch die Reibung des Luftstromes an der in dem überflüssigen Raume befindlichen Luft Theile der letztern in Bewegung gesetzt und allmählig mit fortgerissen. Die

auf diese Weise aus dem überflüssigen Raume ausgetretene Luft wird an den dem Luftstrom entfernteren Punkten durch von aussen her durch dieselben Oeffnungen eindringende Luft wieder ersetzt. Die lebendige Kraft, welche die auf diesem Wege ein- und ausgetretene Luft innerhalb der Maschine aufnahm, ist für den Effect verloren.

Im Allgemeinen besteht hiernach die während eines Umganges der Maschine aus dieser austretende Luftmasse Σdm aus folgenden vier Theilen: 1) der Luftmasse, welche auf dem richtigen Wege in die Maschine ein- und austritt; 2) derjenigen, welche zwar auf dem richtigen Wege in die Maschine eintritt, aber auf Nebenwegen entweicht oder durch die Saugöffnung zurückströmt: 3) derjenigen Luftmasse, welche durch die eigentliche Ausflussöffnung ein- und austritt, und 4) aus derjenigen Luft, welche durch die eigentliche Austrittsöffnung eintritt, aber durch eine andere Oeffnung aus der Maschine entweicht. Die erste mag durch $\overset{I}{\Sigma} dm$, die zweite durch $\overset{II}{\Sigma} dm$, die dritte durch $\overset{III}{\Sigma} dm$ und die vierte durch $\overset{IV}{\Sigma} dm$ bezeichnet werden.

Die Gleichung 1) gibt hiernach, unter Berücksichtigung der Gleichung 2), für calorische Maschinen:

$$\begin{aligned}
 3) \quad L_{(T)} + \Sigma Q_{(T)} dm &= (\overset{I}{\Sigma} + \overset{II}{\Sigma}) \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) dm \\
 &\quad - (\overset{I}{\Sigma} + \overset{III}{\Sigma}) \left(\frac{gc}{A} \cdot \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) dm \\
 &\quad + (\overset{III}{\Sigma} + \overset{IV}{\Sigma}) \left(\frac{gc}{A} \cdot \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) dm \\
 &\quad - (\overset{II}{\Sigma} + \overset{IV}{\Sigma}) \left(\frac{gc}{A} \cdot \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) dm \\
 &\quad - g \Sigma (x - x_1) dm + \frac{1}{A} (W_{(T)} - U_{(T)}) \\
 &\quad - \Sigma N_{(T)} dm. \quad *)
 \end{aligned}$$

*) Wir schreiben $(\overset{I}{\Sigma} + \overset{II}{\Sigma}) \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) dm$ für $\overset{I}{\Sigma} \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) dm + \overset{II}{\Sigma} \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) dm,$

u. s. w.

Für Gebläsemaschinen und Wettersauger erhält man:

$$\begin{aligned}
 4) \quad & - (L_{(T)} + \Sigma \mathcal{Q}_{(T)} dm) = (\Sigma^I + \Sigma^{III}) \left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) dm \\
 & - (\Sigma^I + \Sigma^{II}) \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) dm \\
 & + (\Sigma^{II} + \Sigma^{IV}) \left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) dm \\
 & - (\Sigma^{III} + \Sigma^{IV}) \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) dm \\
 & + g \Sigma (x - x_1) dm \\
 & + \frac{g}{A} \cdot \Sigma (Q - Q_1) dm \\
 & + \Sigma N_{(T)} dm.
 \end{aligned}$$

Die von der Luft auf die calorische Maschine übertragene Arbeit besteht aus der Nutzarbeit, der durch die Reibung der Maschinenteile unter sich absorbierten und aus derjenigen Arbeit, welche durch Stösse zwischen den Maschinenteilen verloren gegangen ist. Bezeichnet man die Nutzarbeit durch $L'_{(T)}$, die durch Reibung und Stösse der Maschinenteile unter sich verbrauchte Arbeit durch $R'_{(T)}$, so hat man

$$L_{(T)} + \Sigma \mathcal{Q}_{(T)} dm = L'_{(T)} + R'_{(T)},$$

oder

$$5) \quad L'_{(T)} = L_{(T)} + \Sigma \mathcal{Q}_{(T)} dm - R'_{(T)}.$$

Der Wirkungsgrad einer calorischen Maschine ist das Verhältniss der Nutzarbeit zu dem Arbeits-Aequivalent der durch die Feuerung der Luft innerhalb der Maschine zugeführten Wärme. Derselbe ist daher

$$6) \quad \eta' = \frac{L'_{(T)}}{\frac{1}{A} \cdot W'_{(T)}}.$$

Die zum Betriebe einer Gebläsemaschine oder eines Wettersaugers während eines Umganges erforderliche Arbeit ist, wenn $R''_{(T)}$ die durch Reibung und Stösse der Maschinenteile unter sich verbrauchte lebendige Kraft vorstellt:

$$7) \quad L''_{(T)} = - (L_{(T)} + \Sigma \mathcal{Q}_{(T)} dm) + R''_{(T)}.$$

Die mittelst einer Gebläsemaschine auf den gelieferten Wind übertragene reine Nutzarbeit ist:

$$\begin{aligned}
 8) \quad L_{(T)}''' &= (\overset{I}{\Sigma} + \overset{III}{\Sigma}) \left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) dm \\
 &\quad - \overset{I}{\Sigma} \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) dm - \overset{III}{\Sigma} \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) dm \\
 &\quad - \overset{IV}{\Sigma} \left(\frac{gc}{A} \Delta \vartheta + \frac{1}{2} \Delta V^2 \right) dm,
 \end{aligned}$$

wo für eine beliebige Molekel der durch die Ausblase-Oeffnung aus der Windleitung zurückgetretenen Luftmasse $\overset{IV}{\Sigma} dm$ die Ausdrücke $\Delta \vartheta$ und ΔV^2 bezüglich die Differenzen bezeichnen, um welche die Grenzwerte der Grössen ϑ und V^2 beim Wiedereintritte jener Molekel in die Maschine die Grenzwerte jener Grössen beim ersten Eintritte derselben Molekel in die Maschine (welcher Eintritt durch die Saugöffnung Statt hatte) übertreffen.

Der Wirkungsgrad der Gebläsemaschine ist

$$9) \quad \eta'' = \frac{L_{(T)}'''}{L_{(T)}''}.$$

Wenn die Luftmolekel dm mit der Geschwindigkeit V aus einem Wettersauger in die freie Atmosphäre oder einen sehr weiten Behälter eintritt, so findet ein Verlust $= \frac{1}{2} V^2 dm$ an lebendiger Kraft Statt. Daher ist der Theil der Arbeitsleistung des Wettersaugers, welcher zur Vergrößerung der lebendigen Kraft der durchgeströmten Luft gedient hat, für den Zweck der Maschine verloren. Die nützliche Arbeit eines Wettersaugers ist hiernach, wenn $\overset{II}{\Sigma'} dm$ und $\overset{IV}{\Sigma'} dm$ bezüglich diejenigen Theile der Massen $\overset{II}{\Sigma} dm$ und $\overset{IV}{\Sigma} dm$ vorstellen, welche bei undichtem Abschlusse des Saugventils in das Saugrohr zurückströmen:

$$\begin{aligned}
 10) \quad L_{(T)}^{\overset{IV}{}} &= \frac{gc}{A} \overset{I}{\Sigma} (\vartheta - \vartheta_1) dm \\
 &\quad + \frac{gc}{A} \cdot (\overset{II}{\Sigma} - \overset{II}{\Sigma'}) (\vartheta - \vartheta_1) dm \\
 &\quad - \frac{gc}{A} \overset{IV}{\Sigma} (\Delta \vartheta) dm, \quad *)
 \end{aligned}$$

*) Dürfte man bei den Wettersaugern den von der Luft aufgenommenen Theil der durch die Reibung und durch Stösse erzeugten Wärme, sowie die der Luft durch die Maschine entzogene Wärme, als unbedeutend vernachlässigen, so würde man für die Wettersauger haben $dQ = 0$, und die unter [2.] des §. 3 citirte Differentialgleichung der mechanischen Wärmetheorie würde dann übergehen in die folgende:

wo $\sum^{IV}_m (\Delta \vartheta) dm$ die Differenz ist, um welche der Werth des Aus-

$$a) \quad c \cdot d\vartheta - \frac{AR}{\alpha} (1 + \alpha\vartheta) \frac{dp}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber integrabel und man erhält aus derselben, wenn unter $\log$ der natürliche Logarithmus verstanden wird:

$$\log(1 + \alpha\vartheta) = \frac{AR}{c} \cdot \log p + \text{const.}$$

Nimmt man das Integral links des Gleichheitszeichens zwischen den Grenzen ϑ_1 und ϑ , und sind p_1 und p die entsprechenden Grenzwerte von p , so hat man:

$$\log \frac{1 + \alpha\vartheta}{1 + \alpha\vartheta_1} = \frac{AR}{c} \cdot \log \frac{p}{p_1},$$

also

$$\frac{1 + \alpha\vartheta}{1 + \alpha\vartheta_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{AR}{c}},$$

und

$$b) \quad \vartheta - \vartheta_1 = \left(\frac{1}{\alpha} + \vartheta_1\right) \cdot \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{AR}{c}} - 1\right].$$

Da nach [3.] §. 3 $p_1 = K \cdot \rho_1 (1 + \alpha\vartheta_1)$, und daher, wenn v_1 das Volumen der Gewichtseinheit der Luft bei der Spannung p_1 und der Temperatur ϑ_1 vorstellt,

$$\frac{1}{\alpha} + \vartheta_1 = \frac{p_1}{K \alpha \rho_1} = \frac{p_1 v_1 g}{K \alpha}, \text{ und da ferner nach §. 3 } K \alpha = R \cdot g, \text{ also } \frac{1}{\alpha} + \vartheta_1 =$$

$\frac{p_1 v_1}{R}$ ist, so hat man

$$c) \quad \frac{cg}{A} (\vartheta - \vartheta_1) = \frac{cg}{A} \left(\frac{1}{\alpha} + \vartheta_1\right) \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{AR}{c}} - 1\right] = \frac{cg p_1 v_1}{AR} \cdot \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{AR}{c}} - 1\right].$$

Nach §. 8 ist $\frac{AR}{c} = 1 - \frac{c_1}{c}$, und wenn man den Bruch $\frac{c}{c_1}$ durch z bezeichnet,

so hat man $\frac{AR}{c} = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z}$. Substituirt man diesen Werth für $\frac{AR}{c}$

in die Gleichung c), so erhält man

$$d) \quad \frac{cg}{A} (\vartheta - \vartheta_1) = g \frac{z}{z-1} p_1 v_1 \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{z-1}{z}} - 1\right].$$

Durch Substitution der rechten Seite dieser Gleichung für $\frac{cg}{A} (\vartheta - \vartheta_1)$ in die Gleichung 10) würde man erhalten:

$$e) \quad L_{(T)}^{IV} = g \cdot \frac{z}{z-1} \sum^I p_1 v_1 \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{z-1}{z}} - 1\right] dm \\ + g \frac{z}{z-1} \left(\sum^{II} - \sum^{II'}\right) p_1 v_1 \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{z-1}{z}} - 1\right] dm. \\ - \frac{cg}{A} \sum^{IV}_m (\Delta \vartheta) dm.$$

druckes $\sum^{IV} \vartheta dm$ den Werth des Ausdruckes $\vartheta_1 \cdot \sum^m dm$ übersteigt, wenn unter ϑ_1 die mittlere Temperatur der Luft verstanden wird, welche der Gleichung

$$\vartheta_1 = \frac{(\sum^I + \sum^{II} - \sum^{II'}) \vartheta_1 dm}{(\sum^I + \sum^{II} - \sum^{II'}) dm}$$

Genüge leistet.

Der Wirkungsgrad des Wettersaugers ist

$$11) \quad \eta''' = \frac{L_{(T)}^{IV}}{L_{(T)}^{II}}.$$

Für die in vorstehenden Gleichungen vorkommenden Summen $\sum^I dm$, $\sum^{II} dm$, $\sum^{III} dm$, $\sum^{IV} dm$, $\sum^{II'} dm$ und $\sum^{IV'} dm$ kann man bezüglich $\sum^I S \varrho_1 d\mathfrak{W}_1$, oder $\sum^I S \varrho \cdot d\mathfrak{W}$, $\sum^{II} S \varrho_1 d\mathfrak{W}_1$, oder $\sum^{II} S \varrho \cdot d\mathfrak{W}$, $\sum^{III} S \varrho_1 d\mathfrak{W}_1$, oder $\sum^{III} S \varrho \cdot d\mathfrak{W}$, $\sum^{IV} S \varrho_1 d\mathfrak{W}_1$, oder $\sum^{IV} S \varrho \cdot d\mathfrak{W}$ u. s. w. setzen, sobald man unter $d\mathfrak{W}_1$ ein Element des Volumens der Luft an der Stelle ihres Eintrittes in die Maschine, unter ϱ_1 die Dichtigkeit der Luft daselbst, unter $d\mathfrak{W}$ aber ein Volumelement der Luft an der Stelle, wo dieselbe wieder aus der Maschine entweicht, und unter ϱ die Dichtigkeit der Luft an dieser Stelle versteht, und wenn die durch S , S , S u. s. w. angegedeutete Summirung über die den Massen $\sum^I dm$, $\sum^{II} dm$, $\sum^{III} dm$ u. s. w. zugehörigen Volumina ausgedehnt wird. Setzt man dann noch für ϱ_1 und ϱ ihre aus [3.] des §. 3 folgenden Werthe, nämlich

$\varrho_1 = \frac{p_1}{K(1 + \alpha \vartheta_1)}$, $\varrho = \frac{p}{K(1 + \alpha \vartheta)}$, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen 3) und 4) für die Gleichungen 5), 7), 8) und 10) die folgenden:

$$12) \quad L'_{(T)} = \frac{1}{K} \cdot (\sum^I + \sum^{II}) \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1 d\mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \right] \\ - \frac{1}{K} \cdot (\sum^I + \sum^{III}) \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot \frac{p d\mathfrak{W}}{1 + \alpha \vartheta} \right] \\ + \frac{1}{K} \cdot (\sum^{III} + \sum^{IV}) \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1 d\mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \right] \\ - \frac{1}{K} \cdot (\sum^{II} + \sum^{IV}) \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot \frac{p d\mathfrak{W}}{1 + \alpha \vartheta} \right] \\ - g \sum (x - x_1) dm + \frac{1}{A} \cdot (W_{(T)} - U_{(T)}) \\ - \sum N_{(T)} dm - R'_{(T)}.$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad L''_{(T)} = & \frac{1}{K} \cdot (\overset{I}{S} + \overset{III}{S}) \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot \frac{p d \mathfrak{W}}{1 + \alpha \vartheta} \right] \\
 & - \frac{1}{K} \cdot (\overset{I}{S} + \overset{II}{S}) \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1 d \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \right] \\
 & + \frac{1}{K} \cdot (\overset{II}{S'} + \overset{IV}{S'}) \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p d \mathfrak{W}}{1 + \alpha \vartheta} \right] \\
 & + (\overset{II}{\Sigma} - \overset{II}{\Sigma'} + \overset{IV}{\Sigma} - \overset{IV}{\Sigma'}) \left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) dm \\
 & - \frac{1}{K} \cdot (\overset{III}{S} + \overset{IV}{S}) \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1 d \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \right] \\
 & + g \Sigma (x - x_1) dm + \frac{g}{A} \cdot \Sigma (Q - Q_1) dm \\
 & + \Sigma N_{(T)} dm + R''_{(T)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \quad L'''_{(T)} = & \frac{1}{K} \cdot (\overset{I}{S} + \overset{III}{S}) \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot \frac{p d \mathfrak{W}}{1 + \alpha \vartheta} \right] \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \overset{I}{S} \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1 d \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \right] \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \overset{III}{S} \left[\left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1 d \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \right] \\
 & - \overset{IV}{\Sigma} \left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) dm.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15) \quad L^IV_{(T)} = & \frac{gc}{AK} \cdot \overset{I}{S} \left[(\vartheta - \vartheta_1) \cdot \frac{p_1 d \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \right] \\
 & + \frac{gc}{AK} \cdot (\overset{II}{S} - \overset{II}{S'}) \left[(\vartheta - \vartheta_1) \cdot \frac{p_1 d \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \right] \\
 & - \frac{gc}{A} \cdot \overset{IV}{\Sigma'} (\vartheta) dm.
 \end{aligned}$$

Darf man voraussetzen, dass ϑ_1 , p_1 und V_1 für alle durch dieselbe Oeffnung eintretenden Luftmolekel dieselben Werthe haben, und dass ebenso die Werthe von ϑ , p , V für alle durch dieselbe Oeffnung aus der Maschine austretenden Luftmolekel dieselben sind, so erhält man, wenn das Volumen $(\overset{I}{S} + \overset{II}{S}) d\mathfrak{W}_1$ durch $\overset{I+II}{\mathfrak{W}_1}$, das Volumen $(\overset{I}{S} + \overset{III}{S}) d\mathfrak{W}$ durch $\overset{I+III}{\mathfrak{W}}$, das Volumen $\overset{I}{S} d\mathfrak{W}_1$ durch $\overset{I}{\mathfrak{W}_1}$, $\overset{III}{S} d\mathfrak{W}_1$ durch $\overset{III}{\mathfrak{W}_1}$, $(\overset{II}{S'} + \overset{IV}{S'}) d\mathfrak{W}$ durch $\overset{II+IV}{\mathfrak{W}'}$ u. s. w. bezeichnet wird, und wenn zugleich ϑ , p , V für die durch die Saugöffnung zurücktretenden Luftmolekel durch ϑ' , p' , V' , die Grössen ϑ_1 , p_1 und V_1 für die durch die Ausblaseöffnung in die Maschine eintretenden Luftmolekel aber durch ϑ_1'' , p_1'' , V_1'' vorgestellt werden, aus den Gleichungen 12), 13), 14) und 15) die folgenden:

$$\begin{aligned}
 16) \quad L'_{(T)} = & \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1 \mathfrak{W}_1^{I+II}}{1 + \alpha \vartheta_1} \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot \frac{p \mathfrak{W}^{I+III}}{1 + \alpha \vartheta} \\
 & + \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta_1'' + \frac{1}{2} V_1'^2 \right) \cdot \frac{p_1'' \mathfrak{W}_1^{III+IV}}{1 + \alpha \vartheta_1''} \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta' + \frac{1}{2} V'^2 \right) \cdot \frac{p' \mathfrak{W}'^{II+IV}}{1 + \alpha \vartheta'} \\
 & - \left(\frac{II}{\Sigma} - \frac{II'}{\Sigma'} + \frac{IV}{\Sigma} - \frac{IV'}{\Sigma'} \right) \left(\frac{g^c}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) dm \\
 & - \Sigma(x - x_1) dm + \frac{1}{A} \cdot (W_{(T)} - U_{(T)}) \\
 & - \Sigma N_{(T)} dm - R'_{(T)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad L''_{(T)} = & \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot \frac{p \mathfrak{W}^{I+III}}{1 + \alpha \vartheta} \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1 \mathfrak{W}_1^{I+II}}{1 + \alpha \vartheta_1} \\
 & + \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta' + \frac{1}{2} V'^2 \right) \cdot \frac{p' \mathfrak{W}'^{II+IV}}{1 + \alpha \vartheta'} \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta_1'' + \frac{1}{2} V_1'^2 \right) \cdot \frac{p_1'' \mathfrak{W}_1^{III+IV}}{1 + \alpha \vartheta_1''} \\
 & + \left(\frac{II}{\Sigma} - \frac{II'}{\Sigma'} + \frac{IV}{\Sigma} - \frac{IV'}{\Sigma'} \right) \left(\frac{g^c}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) dm \\
 & + g \Sigma(x - x_1) dm + \frac{g}{A} \cdot \Sigma(Q - Q_1) dm \\
 & + \Sigma N_{(T)} dm + R''_{(T)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18) \quad L'''_{(T)} = & \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot \frac{p \mathfrak{W}^{I+III}}{1 + \alpha \vartheta} \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1 \mathfrak{W}_1^I}{1 + \alpha \vartheta_1} \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{g^c}{A} \vartheta_1'' + \frac{1}{2} V_1'^2 \right) \cdot \frac{p_1'' \mathfrak{W}_1^{III}}{1 + \alpha \vartheta_1''} \\
 & - \frac{IV}{\Sigma} \left(\frac{g^c}{A K} \Delta \vartheta + \frac{1}{2} \Delta V^2 \right) dm.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19) \quad L_{(T)}^{IV} &= \frac{gc}{AK} (\vartheta - \vartheta_1) \cdot \frac{p_1 \mathfrak{W}_1^I}{1 + \alpha \vartheta_1} \\
 &+ \frac{gc}{AK} (\vartheta - \vartheta_1) \cdot \frac{p_1 (\mathfrak{W}_1^{II} - \mathfrak{W}_1')}{1 + \alpha \vartheta_1} \\
 &- \frac{gc}{A} \sum^{IV} (\Delta \vartheta)^m dm.
 \end{aligned}$$

Dieselben Gleichungen 16) bis 19) bestehen auch noch für den Fall, dass Temperatur, Spannung und Geschwindigkeit der Luft nicht für alle durch dieselbe Oeffnung in die Maschine eintretenden und nicht für alle durch dieselbe Oeffnung aus der Maschine austretenden Luftmolekel bezüglich dieselben Werthe haben, sobald man nur unter $\vartheta_1, \vartheta, p_1, p, V_1, V, \vartheta', p', V', \vartheta_1'', p_1'', V_1''$ solche Mittelwerthe versteht, dass, wenn diese Mittelwerthe durch ein über die betreffenden Ausdrücke gesetztes m charakterisirt werden, folgenden Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$\begin{aligned}
 20) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \vartheta_1^m &= \frac{(\sum^I + \sum^{II}) \vartheta_1 dm}{(\sum^I + \sum^{II}) dm}; \\
 p_1^m &= K(1 + \alpha \vartheta_1^m) \cdot \frac{(\sum^I + \sum^{II}) dm}{\mathfrak{W}_1^{I+II}}; \\
 V_1^m &= \frac{(\sum^I + \sum^{II}) V_1^2 dm}{(\sum^I + \sum^{II}) dm}; \\
 \vartheta'^m &= \frac{(\sum^{II'} + \sum^{IV'}) \vartheta' dm}{(\sum^{II'} + \sum^{IV'}) dm}; \\
 p'^m &= K(1 + \alpha \vartheta'^m) \cdot \frac{(\sum^{II'} + \sum^{IV'}) dm}{\mathfrak{W}'^{II+IV}}; \\
 V'^m &= \frac{(\sum^{II'} + \sum^{IV'}) V'^2 dm}{(\sum^{II'} + \sum^{IV'}) dm}; \\
 \vartheta_1''^m &= \frac{(\sum^{III} + \sum^{IV}) \vartheta_1'' dm}{(\sum^{III} + \sum^{IV}) dm}; \\
 p_1''^m &= K(1 + \alpha \vartheta_1''^m) \cdot \frac{(\sum^{III} + \sum^{IV}) dm}{\mathfrak{W}_1^{III+IV}}; \\
 V_1''^m &= \frac{(\sum^{III} + \sum^{IV}) V_1''^2 dm}{(\sum^{III} + \sum^{IV}) dm}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

In den vorhergehenden Gleichungen ist $\mathfrak{W}_1^{I+II}$ das Volumen der während eines Umganges der Maschine durch die Saugöffnung in jene eintretenden, $\mathfrak{W}^{I+III}$ das Volumen der durch die Ausblase-Oeffnung austretenden Luft, $\mathfrak{W}_1^{III+IV}$ das Volumen der aus der Windleitung, oder im Allgemeinen durch die Ausblase-Oeffnung in die Maschine zurücktretenden und $\mathfrak{W}'^{II+IV}$ das Volumen der durch die Saugöffnung zurückströmenden Luft.

Tritt die Luft aus einer Röhrenleitung in die Maschine ein, wie bei den Wettersaugern, so kann als Stelle des Eintrittes der Windmasse $(\overset{I}{\Sigma} + \overset{II}{\Sigma})dm$ irgend ein Querschnitt jener Röhrenleitung betrachtet werden. Wird dieser Querschnitt in einer hinreichend grossen Entfernung von der Maschine angenommen, wo ein Zurückströmen der Luft nicht Statt hat, so hat man $(\overset{II}{\Sigma}' + \overset{IV}{\Sigma}')dm = 0$ zu setzen. In der Regel wird aber auch $(\overset{II}{\Sigma} - \overset{II}{\Sigma}')dm = 0$ und $(\overset{IV}{\Sigma} - \overset{IV}{\Sigma}')dm = 0$ gesetzt werden dürfen.

Nimmt man bei Gebläsemaschinen zur Ausblaseöffnung einen nicht nahe an der Maschine befindlichen Querschnitt der Windleitung, etwa die Düsenmündung, so ist, weil hier ein Zurückströmen des Windes nicht Statt hat, $\overset{IV}{\Sigma}dm = 0$ und $\overset{III}{\Sigma}dm = 0$.

In dem Falle, wo der Wind durch heisse Röhren geht und erwärmt wird, ist unter $g\Sigma(Q - Q_1)dm$ der Ueberschuss der durch die Röhren zugeführten Wärme über die an die Maschine und die Windleitung abgegebene Wärme zu verstehen, und es ist dann in den Gleichungen 13) und 17) vor dem Ausdruck $\frac{g}{A}\Sigma(Q - Q_1)dm$ statt des Pluszeichens (+) das Minuszeichen (—) zu setzen.

Man wird, wenn x_1' und x' die Koordinaten der Schwerpunkte der Querschnitte des Luftstromes bezüglich an der Saugöffnung und an der Ausblaseöffnung vorstellen, noch sehr genähert richtige Gleichungen behalten, wenn man für $\Sigma(x - x_1')dm$ in den Gleichungen 16) und 17) den Ausdruck $(x' - x_1')\overset{I}{\Sigma}dm$ setzt.

Unter der Voraussetzung, dass $\overset{IV}{\Sigma}dm = \overset{IV}{\Sigma}'dm$ und $\overset{II}{\Sigma}dm = \overset{II}{\Sigma}'dm$, und dass bei Gebläsemaschinen als Ausblaseöffnungen und bei den Wettersaugern als Saugöffnungen solche Querschnitte bezüglich der Windleitung und der Wetterluten genommen werden, dass für erstere $\overset{III}{\Sigma}dm = 0$ und $\overset{IV}{\Sigma}dm = 0$, für die Wettersauger aber $\overset{II}{\Sigma}'dm = 0$

und $\sum' dm = 0$ ist, erhält man nun für die verschiedenen Maschinen die folgenden sehr genähert richtigen Gleichungen:

Für calorische Maschinen aus Gleichung 16)

$$\begin{aligned}
 21) \quad L'_{(T)} = & \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \cdot \frac{p_1^{I+II} \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{gc}{A} \vartheta + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot \frac{p^{I+III} \mathfrak{W}}{1 + \alpha \vartheta} \\
 & + \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{gc}{A} \vartheta_1'' + \frac{1}{2} V_1'^2 \right) \cdot \frac{p_1^{I+IIIV} \mathfrak{W}_1''}{1 + \alpha \vartheta_1''} \\
 & - \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{gc}{A} \vartheta' + \frac{1}{2} V'^2 \right) \cdot \frac{p^{II+IV} \mathfrak{W}'}{1 + \alpha \vartheta'} \\
 & - g(x' - x_1') \sum dm + \frac{1}{A} \cdot (W_{(T)} - U_{(T)}) \\
 & - \sum N_{(T)} dm - R'_{(T)};
 \end{aligned}$$

für Gebläsemaschinen aus 17), weil $\frac{p \mathfrak{W}}{1 + \alpha \vartheta} = \frac{p_1 \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1}$, und, da

$\sum dm = \sum' dm$ vorausgesetzt wurde, auch $\frac{p_1 \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} = \frac{p' \mathfrak{W}'}{1 + \alpha \vartheta'}$ ist,

$$\begin{aligned}
 22) \quad L''_{(T)} = & \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1) + \frac{1}{2} (V^2 - V_1^2) \right] \cdot \frac{p \mathfrak{W}}{1 + \alpha \vartheta} \\
 & + \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{gc}{A} (\vartheta' - \vartheta_1) + \frac{1}{2} (V'^2 - V_1'^2) \right] \cdot \frac{p' \mathfrak{W}'}{1 + \alpha \vartheta'} \\
 & + g(x' - x_1') \sum dm \pm \frac{g}{A} \cdot \sum (Q - Q_1) dm + \sum N_{(T)} dm + R''_{(T)},
 \end{aligned}$$

wo vor dem Ausdruck $\sum \frac{g}{A} (Q - Q_1) dm$ das obere Vorzeichen (+) zu nehmen ist, wenn mit kaltem Wind geblasen wird, das untere Vorzeichen (—) aber, wenn der Wind noch durch heisse Röhren geht; für Wettersauger aus 17)

$$\begin{aligned}
 23) \quad L''_{(T)} = & \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1) + \frac{1}{2} (V^2 - V_1^2) \right] \cdot \frac{p_1 \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} \\
 & + \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1'') + \frac{1}{2} (V^2 - V_1'^2) \right] \cdot \frac{p^{III} \mathfrak{W}}{1 + \alpha \vartheta} \\
 & + g(x' - x_1'') \sum dm + \frac{g}{A} \cdot \sum (Q - Q_1) dm \\
 & + \sum N_{(T)} dm + R''_{(T)}.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung 18) gibt

$$24) \quad L_{(T)}''' = \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1) + \frac{1}{2}(V^2 - V_1^2) \right] \cdot \frac{p_1^I \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta},$$

und die Gleichung 19)

$$25) \quad L_{(T)}^{IV} = \frac{gc}{AK} \cdot (\vartheta - \vartheta_1) \cdot \frac{p_1^I \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1}.$$

Die Gleichungen 21), 22) und 23) lassen sich auch so schreiben:

$$21') \quad L_{(T)}' = -\frac{1}{K} \cdot \left[\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1) + \frac{1}{2}(V^2 - V_1^2) + g(x' - x_1') + \zeta' + \zeta'' + \zeta''' \right] \cdot \frac{p_1^I \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} + \frac{1}{A} \cdot (W_{(T)} - U_{(T)}) - \Sigma N_{(T)} dm - R'_{(T)},$$

$$22') \quad L_{(T)}'' = \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1) + \frac{1}{2}(V^2 - V_1^2) + g(x' - x_1') + \zeta' \right] \cdot \frac{p_1^I \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta} \pm \frac{g}{A} \cdot \Sigma (Q - Q_1) dm + \Sigma N_{(T)} dm + R''_{(T)},$$

$$23') \quad L_{(T)}'' = \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1) + \frac{1}{2}(V^2 - V_1^2) + g(x' - x_1') + \zeta' \right] \cdot \frac{p_1^I \mathfrak{W}_1}{1 + \alpha \vartheta_1} + \frac{g}{A} \Sigma (Q - Q_1) dm + \Sigma N_{(T)} dm + R''_{(T)},$$

sobald man in 21') unter ζ' den Ausdruck

$$\left[\frac{gc}{A} (\vartheta' - \vartheta_1) + \frac{1}{2}(V'^2 - V_1'^2) \right] \cdot \frac{\mathfrak{W}_1^{II}}{\mathfrak{W}_1^I},$$

unter ζ'' den Ausdruck

$$\left[\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1'') + \frac{1}{2}(V^2 - V_1''^2) \right] \cdot \frac{p_1^{III} \mathfrak{W}_1 (1 + \alpha \vartheta_1)}{p_1^I \mathfrak{W}_1 (1 + \alpha \vartheta)}$$

und unter ζ''' den Ausdruck

$$\left[\frac{gc}{A} (\vartheta' - \vartheta_1'') + \frac{1}{2}(V'^2 - V_1''^2) \right] \cdot \frac{p_1^{IV} \mathfrak{W}' (1 + \alpha \vartheta_1)}{p_1^I \mathfrak{W}_1 (1 + \alpha \vartheta')},$$

in 22') unter ζ' den Ausdruck

$$\left[\frac{gc}{A} (\vartheta' - \vartheta_1) + \frac{1}{2}(V'^2 - V_1'^2) \right] \cdot \frac{p_1^{II} \mathfrak{W}' (1 + \alpha \vartheta)}{p_1^I \mathfrak{W}_1 (1 + \alpha \vartheta')}$$

und in 23') unter ζ' den Ausdruck

$$\left[\frac{gc}{A} (\vartheta - \vartheta_1'') + \frac{1}{2} (V^2 - V_1''^2) \right] \cdot \frac{p \mathfrak{W} (1 + \alpha \vartheta_1)}{p_1 \mathfrak{W}_1 (1 + \alpha \vartheta)}$$

versteht.

Die Gleichungen 21'), 22'), 23'), 24) und 25) sind nun die für die Anwendung geeigneten. Die Gleichung 21') gibt die Nutzleistung einer calorischen Maschine für einen Umgang oder ein Kolbenspiel, die Gleichung 22') die für einen Umgang erforderliche Arbeitsleistung zum Betriebe einer beliebigen Gebläsemaschine (Cylinder-, Kasten-, Balg-, Tonnengebläse, Ventilatoren, welche zum Blasen benutzt werden, u. s. w.), 23') gibt die erforderliche Arbeit zum Betriebe eines Wettersaugers, 24) die nützliche Arbeit einer Gebläsemaschine, und 25) die Nutzleistung eines Wettersaugers. In den Gleichungen 22') und 24) ist $\mathfrak{W}$ das Volumen der von der Gebläsemaschine effectiv gelieferten Windmenge von der Spannung p , während in 23') und 25) $\mathfrak{W}_1$ das Volumen der von der Wettermaschine geförderten Luft von der Spannung p_1 vorstellt.

Die Bestimmung der in den obigen Gleichungen vorkommenden Grössen $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}$, sowie der Temperatur, Spannung und Geschwindigkeit der Luft, bietet keine besonderen Schwierigkeiten dar. Die Grössen $R'_{(T)}$, $R''_{(T)}$ und $\Sigma N_{(T)} dm$, sowie die Koeffizienten ζ , ζ'' , ζ''' , sind aus Erfahrungssätzen hinlänglich genau zu bestimmen. Es ist daher hier nur noch der Weg zu bezeichnen, welchen man zur Bestimmung der Grössen $W_{(T)}$, $U_{(T)}$ und $g \Sigma (Q - Q_1) dm$ einzuschlagen hat.

Die Wärmequantität, welche das Element ω der Oberfläche eines Körpers in der unendlichkleinen Zeit dt ausstrahlt, ist nach Dulong und Petit:

$$26) \quad dq' = h' a^\tau (a^{\vartheta - \tau} - 1) dt, \quad *)$$

wo a eine Constante und zwar $= 1,0077$, und τ die Temperatur der umgebenden Wandfläche des Gebäudes ist, worin die Maschine sich befindet; ϑ stellt die Temperatur des Körpers an der Fläche ω vor. Der Koeffizient h' ist je nach der Beschaffenheit der Fläche ω verschieden, übrigens unabhängig von der Grösse und Form des Kör-

*) Vergl. Traité de la chaleur, par E. Péclet. 3ième édition. Paris 1860. Tome I. p. 365.

pers, vorausgesetzt, dass ω nicht einer nach innen gebogenen Fläche angehört.

Die Quantität der an den Berührungsstellen der Luft mitgetheilten Wärme ist nach den genannten Physikern:

$$27) \quad dq'' = \omega \cdot h''(\vartheta - \tau)^{1,233} \cdot dt. \quad *)$$

Dabei ist der Koeffizient h'' abhängig von der Form und den Dimensionen des betrachteten Körpers, aber unabhängig von der Natur und der Temperatur der Fläche ω .

Die Wärmequantität, welche das Flächenelement ω in der unendlichkleinen Zeit dt überhaupt abgibt, ist daher

$$28) \quad dq = dq' + dq'' = \omega [h'a^r(a^{\vartheta-r} - 1) + h''(\vartheta - \tau)^{1,233}] dt.$$

Die Wärmequantität, welche die durch ein Rohr streichende Luft an jenes abgibt, wenn die Temperatur ϑ'' der Luft höher ist, als die Temperatur ϑ' des Rohres an der Innenfläche, kann der Grösse $(\vartheta'' - \vartheta')$ proportional angenommen werden, und die Quantität der Wärme, welche während der Zeit dt durch das Element ω der Innenfläche des Rohres von der Luft auf die Masse des Rohres übergeht, ist daher

$$29) \quad dq''' = \omega h'''(\vartheta'' - \vartheta') \cdot dt,$$

wo h''' ein durch Versuche zu bestimmender constanter Koeffizient ist.

Wir wollen uns den Raum zwischen zwei einander parallelen unendlichen Ebenen A und B von einer festen homogenen Masse ohne krystallinische Struktur erfüllt denken, und annehmen, dass die Temperaturen ϑ und ϑ' dieser Flächen durch irgend ein Mittel constant erhalten werden. Nach der analytischen Wärmetheorie ist die Wärmequantität, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit eines den Ebenen A und B parallel geführten Schnittes der zwischen denselben befindlichen Masse geht, wenn e den Abstand der Ebenen A und B von einander vorstellt:

$$30) \quad q^{iv} = k \cdot \frac{\vartheta' - \vartheta}{e},$$

wo k ein von der Natur der zwischen A und B befindlichen Masse abhängiger, übrigens constanter Koeffizient ist.

Wenn die Temperaturdifferenzen nicht sehr gross sind, so kann als hinreichend genau für die Anwendungen gesetzt werden:

*) Vergl. p. 365 Tome I des angeführten Werkes von Péclet.

$$26') \quad dq' = \omega h' (\vartheta - \tau) dt,$$

$$27') \quad dq'' = \omega h'' (\vartheta - \tau) dt,$$

$$28') \quad dq = \omega \cdot (h' + h'') \cdot (\vartheta - \tau) \cdot dt.$$

Wenn die Wandstärke einer Röhre im Verhältniss zum Durchmesser derselben sehr klein ist, und man einestheils von der Differenz des äussern und des innern Durchmessers, anderntheils von der Bewegung der Wärme innerhalb der Masse der Röhrenwandung, in der Richtung der Röhrenaxe, absehen darf, so gilt die Gleichung 30) auch für den Durchgang der Wärme durch die Röhrenwandung. Ist daher die Temperatur stationär geworden, so hat man die Wärmequantität, welche von der durch die Röhre streichenden Luft in der Zeiteinheit an die unendlichkleine Zone $2r\pi \cdot dl$ der Innenfläche der Röhre abgegeben wird, der Wärmequantität gleichzusetzen, welche die zwischen denselben Querschnittsebenen liegende Zone $2r'\pi dl$ der Aussenfläche der Röhre in der Zeiteinheit nach aussen abgibt. Diese Wärmequantität muss aber auch gleich sein der Wärmequantität, welche durch die zwischen denselben Querschnittsebenen innerhalb der Masse der Röhrenwandung liegende Cylinderzone $2r''\pi dl$ (wo $r'' < r'$ und $r'' > r$ ist) während der Zeiteinheit hindurchgeht. Daher hat man für diesen Fall, wenn e die Dicke der Röhrenwandung vorstellt,

$$31) \quad \begin{cases} \frac{dq'''}{dt} = \frac{dq}{dt}, \\ \frac{dq}{\omega dt} = q^{iv}, \end{cases}$$

oder, wenn man die Gleichungen 28'), 29) und 30) berücksichtigt,

$$h'''(\vartheta'' - \vartheta') = (h' + h'') \cdot (\vartheta - \tau),$$

$$(h' + h'')(\vartheta - \tau) = \frac{k}{e} \cdot (\vartheta' - \vartheta),$$

woraus

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{(h' + h'') \cdot h''' \cdot e}{k(h' + h'' + h''') + (h' + h'')h''' \cdot e} \cdot (\vartheta'' - \tau)$$

und

$$32) \quad q^{iv} = \frac{k(h' + h'')h'''}{k(h' + h'' + h''') + (h' + h'')h''' \cdot e} \cdot (\vartheta'' - \tau)$$

gefunden wird.

Wir machen die Voraussetzung, dass nach eingetretenem Beharrungszustande der Bewegung die Temperatur ϑ'' des Windes in der Windleitung eines Gebläses in allen Punkten eines und desselben Querschnittes der Windleitungsröhre denselben Werth, und

dass auch τ in allen Punkten der umgebenden Wandfläche des Gebäudes einerlei Werth habe. Weiss man dann noch, welchen Werth ϑ'' an dem einen Ende der Windleitung hat, und wie sich derselbe nach dem andern Ende hin ändert, so ist man im Stande, die Quantität der von der Windleitung während der Zeit T nach aussen abgegebenen Wärme zu berechnen. Man kann aber unter den gewöhnlichen Umständen für ϑ'' einen constanten mittleren Werth setzen. Wäre z. B. an dem einen Ende der Windleitung $\vartheta'' = \vartheta''_I$, am andern Ende $\vartheta'' = \vartheta''_{II}$, so könnte man als constanten mittleren Werth setzen $\vartheta'' = \frac{1}{2}(\vartheta''_I + \vartheta''_{II})$.

Die Koëfficienten h' , h'' und k sind für die zur Anwendung kommenden Metalle und anderen Körper durch Versuche hinlänglich genau bestimmt und in dem oben citirten Werke von Péclet mitgetheilt. Dabei sind bezüglich des Koëfficienten h'' zugleich verschiedene Formen und Dimensionen der Körper berücksichtigt. Der Koëfficient h''' wird sich aus bekannten Versuchsergebnissen ableiten lassen.

Die Quantität der von der Windleitung nach aussen abgegebenen Wärme würde hiernach, wenn l die Länge der Leitung ist,

$$= r' \pi l \cdot \frac{k(h' + h'')h'''}{k(h' + h'' + h''') + (h' + h'')h'''} \cdot e \cdot (\vartheta''_I + \vartheta''_{II} - 2\tau)$$

sein.

Die Wärmequantität, welche durch die Reibung und durch Stösse im Gebläse etc. erzeugt wird, wird sich durch geeignete Versuche annähernd bestimmen lassen.

Die Wärmequantität, welche der Wind während des Durchganges durch heisse Röhren aufgenommen hat, kann aus der Differenz der Windtemperaturen beim Eintritt in den Winderhitzungsapparat und beim Austritt aus demselben bestimmt werden, ohne dass man nöthig hätte, sich darum zu bekümmern, ob bei dem Durchgange durch die Krümmungen der Röhren im Erhitzungsapparat ein Theil der Wärme in Arbeit verwandelt worden, sobald nur der Widerstand, den der Wind beim Durchgange durch den Apparat erleidet, gehörig in Rechnung gebracht wird.

Bei den calorischen Maschinen kann die der Luft zugeführte Wärmequantität auf solche Weise nicht bestimmt werden. Es wird aber wohl gelingen, dieselbe aus der Temperatur der Luft im Treibcylinder und der Temperatur der Cylinderwandung annähernd zu

ermitteln. Die weitere Verfolgung dieses Gegenstandes wird ohne Zweifel Mittel und Wege finden lassen, die Grössen $W_{(T)}$ und $U_{(T)}$ und überhaupt die Grösse $g \cdot \Sigma(Q - Q_1)$ dm hinlänglich genau zu bestimmen. Mit Rücksicht auf den Zweck der gegenwärtigen Schrift glauben wir aber uns auf die hier gegebenen Andeutungen beschränken zu dürfen.

A n m e r k u n g.

Nach der Gleichung 21') kann auch ohne Weiteres die Nutzleistung einer mit überhitztem Dampfe arbeitenden Dampfmaschine annähernd richtig berechnet werden. Man braucht zu diesem Ende nur an die Stelle der Luft den Wasserdampf zu substituiren, indem man für K und c die für den Wasserdampf geltenden Zahlen setzt. Es ist zwar der Ausdehnungs-Koeffizient α für den Wasserdampf nicht constant, wie für die atmosphärische Luft*), sondern mit der Temperatur veränderlich; indessen wird die Gleichung 21') doch immer noch ein ebenso brauchbares Resultat geben, als irgend eine andere der bis jetzt dafür aufgestellten Gleichungen, sobald man für α den der Temperatur des Dampfes beim Eintritt in den Ueberhitzer entsprechenden Werth setzt.

§. 12. Man kann unsern Satz auch auf die Bewegungen der Atmosphäre anwenden. Es ist zwar in den unteren Schichten der Atmosphäre auch Wassergas und zwar öfter bis zum Sättigungspunkte vorhanden, während sich unser Satz auf coërcible Gase nur so lange anwenden lässt, als der Raum nicht beinahe mit Gas gesättigt ist, und die Temperaturdifferenzen nicht sehr gross werden; allein bei der im Verhältniss zur ganzen Atmosphäre immer gerin-

*) Redtenbacher findet unter Zugrundlegung seines »Dynamidensystems« auf analytischem Wege, dass der Ausdehnungs-Koeffizient α selbst für die bisher nur in gasförmigem Zustande bekannten Körper nicht ganz constant sein könne, sondern von der Natur des Gases und von der Dichtigkeit desselben abhängig sein müsse. Dieses wird auch nach Redtenbacher durch die Versuche von Regnault bestätigt. Die Werthe von α sind aber für die sogenannten permanenten Gase nur sehr wenig von einander verschieden, und die mit den Aenderungen der Dichtigkeit eintretenden Aenderungen von α sind für jene Gase so unbedeutend, dass man diese Aenderungen unter allen Umständen für die Anwendung ausser Acht lassen und α als Constante behandeln kann, was wir in der gegenwärtigen Schrift auch, in Uebereinstimmung mit allen diesen Gegenstand behandelnden Schriftstellern, gethan haben.

gen Quantität des vorhandenen gesättigten Wassergases und bei den unbedeutenden Spannungen und nicht gar zu grossen Temperaturunterschieden wird unser Satz immer noch ein sehr genähert richtiges Resultat geben. Die Wirkungen der in der Atmosphäre etwa schwimmenden tropfbarflüssigen und festen Körper, wie z. B. des Wassers in Bläschen, der Eiskugeln etc., sowie der nach ihrer Bildung bloss im Niederfallen nach der Erde durch die Atmosphäre sich bewegenden Körper, wie der Regentropfen, Hagelkörner etc., ändern an der Richtigkeit des Resultates nichts. Will man dieselben nicht ausser Acht lassen, so sind die Oberflächen gedachter Körper als bewegliche Begrenzungsflächen der Luft zu betrachten.

Wenn die durch Σ angedeutete Summierung über alle in der Atmosphäre vorhandenen Gasmolekel erstreckt wird, so ist die Gleichung (Ic.) des §. 9 die in unserm Satze enthaltene Gleichung für die Bewegungen der Atmosphäre. Dabei ist Folgendes zu bemerken:

Für diejenigen Molekel, welche während der Zeit $\tau - \tau_1$ nicht beständig in gasförmigem Zustande in der Atmosphäre sich befinden, sondern während dieser Zeit erst in gasförmigem Zustande in die Atmosphäre eintreten *), oder während dieser Zeit aus dem gasförmigen Zustande in den tropfbarflüssigen Zustand übergehen, oder durch chemische Prozesse aus der Atmosphäre ausgeschieden werden, sind bezüglich Anfang und Ende der Zeit ihres Verweilens in Gasform in der Atmosphäre die Integrationsgrenzen. Für alle diejenigen Gasmolekel, welche während der Zeit $\tau - \tau_1$ beständig in gasförmigem Zustande in der Atmosphäre sich befinden, sind τ_1 und τ die gemeinschaftlichen Integrationsgrenzen.

Als zugeführte Wärme ist in der durch den Ausdruck

$$g \Sigma (Q - Q_1) dm$$

vorgestellten Summe inbegriffen: 1) Der von der Atmosphäre aufgenommene Theil der von der Sonne und aus dem Weltraum der Erde zugestrahnten und der von der Oberfläche des Landes und des Meeres ausgestrahnten Wärme; 2) die Wärme, welche die Erde der Luft bei der Berührung mittheilt, und 3) die Wärme, welche durch Condensirung von Wassergas, durch Schnee- und Hagelbildung und bei chemi-

*) Zu den während der Zeit $\tau - \tau_1$ erst in Gasform in die Atmosphäre eintretenden Massen gehören die während dieser Zeit verdunstenden Wassermassen, die während derselben Zeit durch chemische Prozesse entstehenden Gase, als Kohlensäure etc., und die den Vulkanen während jener Zeit entströmenden Gase.

schen Prozessen, insbesondere bei der Verbrennung, in der Atmosphäre frei und von der Luft aufgenommen wird. Als der Atmosphäre entzogene Wärme ist in dem Ausdruck $g \Sigma(Q - Q_1)$ dm hauptsächlich zu berücksichtigen: 1) Die Wärme, welche die Atmosphäre an den Weltraum und an die Erde abgibt, und 2) die Wärme, welche bei der Verdunstung von Wasser und dem Schmelzen von Schnee und Eis der Atmosphäre entzogen wird.

Da auf der äussern Begrenzungsfläche der Atmosphäre $p = 0$ ist, so wird durch Schwankungen dieser Fläche Arbeit nicht verrichtet, und der Ausdruck $L_{(\tau - \tau_1)}$ stellt daher nur die Summe von Grössen vor, die von der untern Begrenzungsfläche der Atmosphäre, von der Bildung von Niederschlägen, als Regen, Schnee und Hagel, und dem dadurch verursachten augenblicklichen Verdrängen von Gas durch die gebildeten tropfbarflüssigen und festen Körper und von dem Verschwinden von tropfbarflüssigen, oder festen Körpern aus der Atmosphäre, wobei das Gas in die vorher durch jene Körper eingenommenen Räume eindringt, sowie endlich von den Bewegungen der Wasserbläschen in der Atmosphäre herrühren.

Der Ausdruck $\Sigma N_{(t - t_1)}$ dm stellt denjenigen Theil der lebendigen Kraft der Atmosphäre vor, welcher auf die Erregung von Schallwellen und Wasserwellen (des Meeres etc.) und auf die durch Stoss bewirkte Umformung von Massen verwendet wird. Da indessen auch ein Theil der in dem Ausdrucke $L_{(\tau - \tau_1)}$ inbegriffenen Arbeitsgrössen durch Massenumformung an der Erdoberfläche verbraucht wird, so werden wir im vorliegenden Falle diesen Theil der Grösse $L_{(\tau - \tau_1)}$ mit der durch $\Sigma N_{(t - t_1)}$ dm vorgestellten Grösse zusammenfassen und die Summe beider durch $N_{(\tau - \tau_1)}$ bezeichnen. Die gedachten Massenumformungen an der Erdoberfläche bestehen in der Zerstörung von Gebäuden, Entwurzelung von Bäumen etc.

Der Ausdruck $\Sigma Q_{(t - t_1)}$ dm stellt im vorliegenden Falle die lebendige Kraft vor, welche der Wind durch Stoss auf Körper, die an der Erdoberfläche nicht festhaften, sowie auf Regentropfen, Hagelkörner etc. überträgt. Wir werden hier die lebendige Kraft, welche die atmosphärische Luft durch Druck auf solche Körper überträgt, mit der durch $\Sigma Q_{(t - t_1)}$ dm ausgedrückten zusammenfassen und die Summe dieser beiden Grössen durch $Q_{(\tau - \tau)}$ bezeichnen. In der durch den Ausdruck $L_{(\tau - \tau)}$ vorgestellten Summe sind hiernach solche Arbeitsgrössen nicht mehr inbegriffen, welche durch Massenumformung an der Erdoberfläche und durch Beschleunigung der an

dieser unabhängig von der Bewegung der Erdoberfläche selber sich bewegend, sowie der in der Atmosphäre sich bildenden tropfbarflüssigen und festen Körper, mit Ausnahme der in dem Nebel und in den Wolken enthaltenen Wasserbläschen, absorbirt werden.

Die Summe $\Sigma[\int Xdx + Ydy + Zdz]dm$ enthält nur solche Grössen, welche von der Anziehung der Erde, der Sonne und des Mondes *) herrühren. Die electrischen Vorgänge in der Atmosphäre finden theils zwischen den die Wolken bildenden Wasserbläschen, theils zwischen diesen und der Erde statt. Wenn die durch jene Vorgänge verursachten Bewegungen der Wasserbläschen berücksichtigt werden sollen, so sind die Oberflächen derselben als bewegliche Begrenzungsflächen der Luft zu betrachten, und jene Vorgänge können also nur Einfluss haben auf den Werth des Ausdruckes $L_{(\tau-\tau_1)}$.

Die Zahl c hat nicht für alle Gasmolekel denselben Werth, da sie im Allgemeinen für verschiedene Gase verschieden ist, und namentlich für das Wassergas einen andern Werth hat, als für die atmosphärische Luft.

Wir wollen nun noch einige Entwicklungen und Umformungen vornehmen, wodurch die Bedeutungen, welche die in der Gleichung (Ic.) §. 9 vorkommenden Grössen und Ausdrücke im vorliegenden Falle haben, zum Theil etwas klarer hervortreten werden.

Wir setzen zunächst für die Differenz $V^2 - V_1^2$ das ihr gleiche Integral $2 \int \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz \right)$, und erhalten dann, wenn wir noch, dem Vorhergehenden gemäss, $N_{(\tau-\tau_1)}$ und $\mathcal{Q}_{(\tau-\tau_1)}$ statt bezüglich $\Sigma N_{(t-t_1)}dm$ und $\Sigma \mathcal{Q}_{(t-t_1)}dm$ einführen, die Gleichung

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{g}{A} \Sigma [c(\vartheta - \vartheta_1) + (Q - Q_1)] dm = \\ & = \Sigma \left\{ \int \left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) dx + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) dy + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) dz \right] dm \right. \\ & \quad \left. + S(p\mathfrak{B})_\tau - S(p\mathfrak{B})_{\tau_1} - L_{(\tau-\tau_1)} \right. \\ & \quad \left. - N_{(\tau-\tau_1)} - \mathcal{Q}_{(\tau-\tau_1)} \right\} \end{aligned}$$

Wir nehmen für den vorliegenden Fall den Mittelpunkt der Sonne zum Ursprung der Koordinaten, die Ebene der Erdbahn

*) Die Einwirkungen der andern Himmelskörper werden als unbedeutend hier nicht berücksichtigt.

zur Ebene der x und y ; die positive Halbaxe der x nehmen wir in der zur Zeit der Herbst-Nachtgliche, die positive Halbaxe der y in der zur Zeit des Winter-Solstitiums von dem Mittelpunkt der Sonne nach dem Mittelpunkte der Erde gehenden Richtung; die positive Halbaxe der z sei nach der Seite gerichtet, auf welcher der Nordpol der Ekliptik liegt. Die auf dieses Axensystem bezogenen Koordinaten eines beliebigen Punktes P bezeichnen wir durch x, y, z . Wir legen sodann durch den Mittelpunkt der Erde ein secundäres Axensystem, für welches wir die Aequatorebene *) zur Ebene der x und y nehmen. Die Axe der x sei parallel zur Axe der x des ersten Systems, und auch die positive Halbaxe der x nach derselben Seite gerichtet, wie bei jenem, die positive Halbaxe der y falle in den östlich vom Frühlings-Nachtglichenpunkt liegenden Halbkreis des Aequators; zur positiven Halbaxe der z nehmen wir die nördliche Hälfte der Erdaxe. Die Koordinaten dieses Systems bezeichnen wir durch x', y', z' . Wir betrachten dabei die Erde als eine Kugel, deren Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammenfällt.

Den der Sternzeit eines Punktes P der Atmosphäre am Ende irgend einer Zeit t zugehörigen Bogen des Aequators für den Halbmesser $= 1$ drücken wir durch λ , die geographische Breite des Punktes P zu derselben Zeit aber durch φ aus, indem wir die Breite als positiv ansehen, wenn sie nördlich, als negativ, wenn sie südlich ist.

Es seien x, y, z , **) die auf das erste Axensystem bezogenen Koordinaten des Erdmittelpunktes am Ende der Zeit t , so hat man, wenn noch ψ die Schiefe der Ekliptik vorstellt, für die Koordinaten des Punktes P :

$$2) \quad \begin{cases} x = x' + x', \\ y = y' + y' \cos \psi + z' \sin \psi, \\ z = z' + z' \cos \psi - y' \sin \psi. \end{cases}$$

Es sei r die Entfernung des Punktes P vom Erdmittelpunkte, so ist:

*) Die Präcession der Nachtgleichen, die Nutation der Erdaxe und die den secularen Schwankungen derselben angehörenden Aenderungen der Schiefe der Ekliptik können hier als unbedeutend ausser Acht gelassen werden.

**) Wir dürfen hier die Störungen, welche der Mond in der Breite der Erde hervorbringt, nicht ausser Acht lassen, d. h. wir dürfen nicht allgemein $z = 0$ setzen, weil wir sonst auch allgemein $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$ setzen müssten, was hier, wo es sich wesentlich auch um die Ebbe und Fluth der Atmosphäre handelt, unzulässig ist.

$$3) \quad \begin{cases} x' = r \cos \varphi \cos \lambda, \\ y' = r \cos \varphi \sin \lambda, \\ z' = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Aus 2) ergibt sich:

$$4) \quad \begin{cases} dx = dx, + dx', \\ dy = dy, + \cos \psi dy' + \sin \psi dz', \\ dz = dz, + \cos \psi dz' - \sin \psi dy'; \end{cases}$$

aus 3) aber:

$$5) \quad \begin{cases} dx' = -r \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - r \cos \varphi \sin \lambda d\lambda + \cos \varphi \cos \lambda dr, \\ dy' = -r \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + r \cos \varphi \cos \lambda d\lambda + \cos \varphi \sin \lambda dr, \\ dz' = r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr. \end{cases}$$

Durch Substitution der Werthe für dx' , dy' , dz' aus 5) in die Gleichungen 4) erhält man:

$$6) \quad \begin{cases} dx = dx, - r \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - r \cos \varphi \sin \lambda d\lambda + \cos \varphi \cos \lambda dr, \\ dy = dy, + \cos \psi (-r \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + r \cos \varphi \cos \lambda d\lambda + \cos \varphi \sin \lambda dr) \\ \quad + \sin \psi (r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr), \\ dz = dz, + \cos \psi (r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr) - \sin \psi (-r \sin \varphi \sin \lambda d\varphi \\ \quad + r \cos \varphi \cos \lambda d\lambda + \cos \varphi \sin \lambda dr). \end{cases}$$

Durch Differentiation der Gleichungen 4) erhält man:

$$7) \quad \begin{cases} d^2x = d^2x, + d^2x', \\ d^2y = d^2y, + \cos \psi d^2y' + \sin \psi d^2z', \\ d^2z = d^2z, + \cos \psi d^2z' - \sin \psi d^2y'. \end{cases}$$

Aus 4) und 7) folgt:

$$8) \quad \begin{aligned} d^2x dx + d^2y dy + d^2z dz &= d^2x, dx + d^2y, dy + d^2z, dz + d^2x' dx, \\ &+ (\cos \psi d^2y' + \sin \psi d^2z') dy, + (\cos \psi d^2z' - \sin \psi d^2y') dz, \\ &+ d^2x' dx' + (\cos \psi d^2y' + \sin \psi d^2z') \cdot (\cos \psi dy' + \sin \psi dz') \\ &+ (\cos \psi d^2z' - \sin \psi d^2y') \cdot (\cos \psi dz' - \sin \psi dy') = d^2x, dx \\ &+ d^2y, dy + d^2z, dz + d^2x' dx, + (\cos \psi d^2y' + \sin \psi d^2z') dy, \\ &+ (\cos \psi d^2z' - \sin \psi d^2y') dz, + d^2x' dx' + d^2y' dy' + d^2z' dz'. \end{aligned}$$

Es seien X , Y , Z , die Summen der nach den Axenrichtungen des ersten Koordinatensystems wirkenden Componenten der den Erdmittelpunkt beschleunigenden Kräfte, so bestehen für die Bewegung des Erdmittelpunktes die Gleichungen:

$$9) \quad \begin{cases} X, = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ Y, = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ Z, = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Substituirt man in dem in der Gleichung 1) vorkommenden Ausdruck

$$\begin{aligned} & \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) dx + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) dy + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) dz \\ &= Xdx + Ydy + Zdz - \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot dx + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dy + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot dz \right) \end{aligned}$$

für die Summe $\frac{d^2x}{dt^2} \cdot dx + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dy + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot dz$ ihren aus 8) sich ergebenden Werth, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen 9):

$$\begin{aligned} 10) \quad & \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) dx + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) dy + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) dz \\ &= (X - X_1)dx + (Y - Y_1)dy + (Z - Z_1)dz \\ &\quad - \left[\frac{d^2x'}{dt^2} dx + \left(\cos \psi \frac{d^2y'}{dt^2} + \sin \psi \frac{d^2z'}{dt^2} \right) dy, \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \psi \frac{d^2z'}{dt^2} - \sin \psi \frac{d^2y'}{dt^2} \right) dz, \right] \\ &\quad - \left(\frac{d^2x'}{dt^2} \cdot dx' + \frac{d^2y'}{dt^2} \cdot dy' + \frac{d^2z'}{dt^2} \cdot dz' \right). \end{aligned}$$

Setzt man in dem Ausdruck $\frac{d^2x'}{dt^2} \cdot dx' + \frac{d^2y'}{dt^2} \cdot dy' + \frac{d^2z'}{dt^2} \cdot dz'$ für dx' , dy' , dz' ihre Werthe aus den Gleichungen 5), sowie für $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$, $\frac{d^2z'}{dt^2}$ ihre durch Differentiation der Gleichungen 5) sich ergebenden Werthe, so erhält man nach einigen leichten Reduktionen:

$$\begin{aligned}
 11) \quad \frac{d^2x'}{dt^2} \cdot dx' + \frac{d^2y'}{dt^2} \cdot dy' + \frac{d^2z'}{dt^2} \cdot dz' = & \left[r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right. \\
 & + r \cos \varphi^2 \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{d^2r}{dt^2} \Big] dr \\
 & + \left[r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - r^2 \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \right] d\varphi \\
 & + r^2 \cos \varphi^2 \frac{d^2\lambda}{dt^2} \cdot d\lambda.
 \end{aligned}$$

Es seien die nach den Richtungen der secundären Koordinatenachsen genommenen Componenten der auf die Molekel dm wirkenden von der Anziehung der Erde, der Sonne und des Mondes herrührenden beschleunigenden Kräfte, unter der Voraussetzung, dass der Schwerpunkt der Molekel dm sich im Punkte P befinde, bezüglich

$$X'_E, Y'_E, Z'_E,$$

$$X'_S, Y'_S, Z'_S,$$

$$X'_M, Y'_M, Z'_M;$$

so sind die Summen der denselben Axenrichtungen parallelen Componenten der auf die Molekel dm wirkenden beschleunigenden Kräfte, mit Ausschluss der von der Spannung der Atmosphäre herrührenden, bezüglich:

$$12) \quad \begin{cases} X' = X'_E + X'_S + X'_M, \\ Y' = Y'_E + Y'_S + Y'_M, \\ Z' = Z'_E + Z'_S + Z'_M. \end{cases}$$

Für die Summen der den Axenrichtungen des ersten Koordinatensystems parallelen Componenten der auf die Molekel dm wirkenden beschleunigenden Kräfte, soweit dieselben nicht von der Spannung der Luft herrühren, hat man daher:

$$X = X',$$

$$Y = Y' \cos \psi + Z' \sin \psi,$$

$$Z = Z' \cos \psi - Y' \sin \psi,$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen 12):

$$13) \quad \begin{cases} X = X'_E + X'_S + X'_M, \\ Y = (Y'_E + Y'_S + Y'_M) \cdot \cos \psi + (Z'_E + Z'_S + Z'_M) \cdot \sin \psi, \\ Z = (Z'_E + Z'_S + Z'_M) \cdot \cos \psi - (Y'_E + Y'_S + Y'_M) \cdot \sin \psi. \end{cases}$$

Es sei g die beschleunigende Kraft, mit welcher die Erde auf die Molekel dm wirkt, so ist

$$14) \quad \begin{cases} X'_E = -g \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda, \\ Y'_E = -g \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \\ Z'_E = -g \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad (11)$$

Die Parallaxe der Sonne ist so klein, dass man, ohne einen merklichen Fehler befürchten zu müssen, für den vorliegenden Fall annehmen kann, die Richtung, in welcher die Sonne die Molekel dm anzieht, sei parallel der von dem Erdmittelpunkt nach dem Mittelpunkte der Sonne gezogenen geraden Linie. Die Parallaxe des Mondes erreicht in ihrem grössten Werthe beinahe 1 Grad und 2 Minuten, so dass die Richtung, nach welcher die Molekel dm von dem Monde angezogen wird, je nach dem Orte der Molekel dm und nach der Zeit um einen Winkel bis zu beinahe $1^\circ 2'$ von der durch die Mittelpunkte der Erde und des Mondes gehenden geraden Linie abweicht. Es sei nun am Ende der beliebig gedachten Zeit t die Rectascension der Sonne $= \mathcal{R}'$, die des Mondes $= \mathcal{R}''$, die Declination der Sonne $= \mathcal{D}'$, die Declination des Mondes $= \mathcal{D}''$, so hat man, wenn G' und G'' bezüglich die von der Anziehung der Sonne und des Mondes herrührenden die Molekel dm beschleunigenden Kräfte vorstellen:

$$15) \quad \begin{cases} X'_S = G' \cos \mathcal{D}' \cos \mathcal{R}', \\ Y'_S = G' \cos \mathcal{D}' \sin \mathcal{R}', \\ Z'_S = G' \sin \mathcal{D}', \\ X'_M = G'' \cos (\mathcal{D}'' + \Delta \mathcal{D}'') \cos (\mathcal{R}'' + \Delta \mathcal{R}''), \\ Y'_M = G'' \cos (\mathcal{D}'' + \Delta \mathcal{D}'') \sin (\mathcal{R}'' + \Delta \mathcal{R}''), \\ Z'_M = G'' \sin (\mathcal{D}'' + \Delta \mathcal{D}''), \end{cases} \quad (12)$$

wo $\Delta \mathcal{R}''$ und $\Delta \mathcal{D}''$ kleine, von $\mathcal{R}''$, $\mathcal{D}''$, λ und φ abhängige Grössen sind.

Es seien G'_0 und G''_0 bezüglich die von der Sonne und dem Monde ausgehenden den Erdmittelpunkt beschleunigenden Kräfte, und es seien $\overset{\circ}{X}'_S$, $\overset{\circ}{Y}'_S$, $\overset{\circ}{Z}'_S$, $\overset{\circ}{X}'_M$, $\overset{\circ}{Y}'_M$, $\overset{\circ}{Z}'_M$ die nach den Richtungen der secundären Koordinatenachsen wirkenden Componenten jener beschleunigenden Kräfte, so ist:

$$16) \quad \begin{cases} \overset{\circ}{X}'_s = G'_o \cos \mathfrak{D}' \cos \mathfrak{K}', \\ \overset{\circ}{Y}'_s = G'_o \cos \mathfrak{D}' \sin \mathfrak{K}', \\ \overset{\circ}{Z}'_s = G'_o \sin \mathfrak{D}', \\ \overset{\circ}{X}'_M = G''_o \cos \mathfrak{D}'' \cos \mathfrak{K}'', \\ \overset{\circ}{Y}'_M = G''_o \cos \mathfrak{D}'' \sin \mathfrak{K}'', \\ \overset{\circ}{Z}'_M = G''_o \sin \mathfrak{D}''. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$17) \quad \begin{cases} X, = \overset{\circ}{X}'_s + \overset{\circ}{X}'_M, \\ Y, = (\overset{\circ}{Y}'_s + \overset{\circ}{Y}'_M) \cos \psi + (\overset{\circ}{Z}'_s + \overset{\circ}{Z}'_M) \sin \psi, \\ Z, = (\overset{\circ}{Z}'_s + \overset{\circ}{Z}'_M) \cos \psi - (\overset{\circ}{Y}'_s + \overset{\circ}{Y}'_M) \sin \psi. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 13), 14), 15), 16) und 17) erhält man nun:

$$18) \quad \begin{cases} X - X, = -g \cos \varphi \cos \lambda + (G' - G'_o) \cos \mathfrak{D}' \cos \mathfrak{K}' \\ \quad + G'' \cos (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \cos (\mathfrak{K}'' + \Delta \mathfrak{K}'') \\ \quad - G''_o \cos \mathfrak{D}'' \cos \mathfrak{K}'', \\ Y - Y, = [-g \cos \varphi \sin \lambda + (G' - G'_o) \cos \mathfrak{D}' \sin \mathfrak{K}' \\ \quad + G'' \cos (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \sin (\mathfrak{K}'' + \Delta \mathfrak{K}'') \\ \quad - G''_o \cos \mathfrak{D}'' \sin \mathfrak{K}''] \cos \psi \\ \quad + [-g \sin \varphi + (G' - G'_o) \sin \mathfrak{D}' \\ \quad + G'' \sin (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') - G''_o \sin \mathfrak{D}''] \sin \psi, \\ Z - Z, = [-g \sin \varphi + (G' - G'_o) \sin \mathfrak{D}' \\ \quad + G'' \sin (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') - G''_o \sin \mathfrak{D}''] \cos \psi \\ \quad - [-g \cos \varphi \sin \lambda + (G' - G'_o) \cos \mathfrak{D}' \sin \mathfrak{K}' \\ \quad + G'' \cos (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \sin (\mathfrak{K}'' + \Delta \mathfrak{K}'') \\ \quad - G''_o \cos \mathfrak{D}'' \sin \mathfrak{K}''] \sin \psi. \end{cases}$$

Substituirt man auf der rechten Seite der Gleichung 10) für die Differenzen $X - X,$, $Y - Y,$, $Z - Z,$ ihre Werthe aus den Gleichungen 18), und für die Differentiale dx , dy , dz ihre Werthe

aus den Gleichungen 4), und berücksichtigt man die Gleichung 11), so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\begin{aligned}
 19) \quad & \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) dx + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) dy + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) dz = \\
 & = \left\{ -g + (G' - G'_0) \cdot [\cos \varphi \cos \mathfrak{D}' \cos(\mathfrak{K}' - \lambda) + \sin \mathfrak{D}' \sin \varphi] \right. \\
 & \quad + G'' \cdot [\cos \varphi \cos (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \cos (\mathfrak{K}'' + \Delta \mathfrak{K}'' - \lambda) \\
 & \quad + \sin \varphi \sin (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'')] \\
 & \quad - G''_0 [\cos \varphi \cos \mathfrak{D}'' \cos (\mathfrak{K}'' - \lambda) + \sin \varphi \sin \mathfrak{D}''] \left. \right\} \frac{dr}{dt} \cdot dt \\
 & + \left\{ (G' - G'_0) [-r \sin \varphi \cos \mathfrak{D}' \cos (\mathfrak{K}' - \lambda) + r \cos \varphi \sin \mathfrak{D}'] \right. \\
 & \quad + G'' [-r \sin \varphi \cos (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \cos (\mathfrak{K}'' + \Delta \mathfrak{K}'' - \lambda) \\
 & \quad + r \cos \varphi \sin (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'')] \\
 & \quad - G''_0 [-r \sin \varphi \cos \mathfrak{D}'' \cos (\mathfrak{K}'' - \lambda) + r \cos \varphi \sin \mathfrak{D}''] \left. \right\} \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt \\
 & + \left[(G' - G'_0) \cdot r \cos \varphi \cos \mathfrak{D}' \sin (\mathfrak{K}' - \lambda) \right. \\
 & \quad + G'' \cdot r \cos \varphi \cos (\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \sin (\mathfrak{K}'' + \Delta \mathfrak{K}'' - \lambda) \\
 & \quad - G''_0 \cdot r \cos \varphi \cos \mathfrak{D}'' \sin (\mathfrak{K}'' - \lambda) \left. \right] \frac{d\lambda}{dt} \cdot dt \\
 & + \left(H \frac{dx}{dt} + J \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) \cdot dt \\
 & - \left[r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r \cos^2 \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{d^2r}{dt^2} \right] \cdot \frac{dr}{dt} \cdot dt \\
 & - \left[r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - r^2 \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \right] \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt \\
 & - r^2 \cos^2 \varphi \frac{d^2\lambda}{dt^2} \cdot \frac{d\lambda}{dt} \cdot dt,
 \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
 H &= -g \cos \varphi \cos \lambda + (G' - G'_0) \cos \mathfrak{D}' \cos \mathfrak{K} \\
 &\quad + G'' \cos(\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \cos(\mathfrak{K}'' + \Delta \mathfrak{K}'') \\
 &\quad - G''_0 \cos \mathfrak{D}'' \cos \mathfrak{K}'' - \frac{d^2 x'}{dt^2}, \\
 J &= \left[-g \cos \varphi \sin \lambda + (G' - G'_0) \cos \mathfrak{D}' \sin \mathfrak{K}' \right. \\
 &\quad + G'' \cos(\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \sin(\mathfrak{K}'' + \Delta \mathfrak{K}'') \\
 &\quad \left. - G''_0 \cos \mathfrak{D}'' \sin \mathfrak{K}'' - \frac{d^2 y'}{dt^2} \right] \cos \psi \\
 &\quad + \left[-g \sin \varphi + (G' - G'_0) \sin \mathfrak{D}' + G'' \sin(\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \right. \\
 &\quad \left. - G''_0 \sin \mathfrak{D}'' - \frac{d^2 z'}{dt^2} \right] \sin \psi, \\
 P &= \left[-g \sin \varphi + (G' - G'_0) \sin \mathfrak{D}' \right. \\
 &\quad + G'' \sin(\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \\
 &\quad \left. - G''_0 \sin \mathfrak{D}'' - \frac{d^2 z'}{dt^2} \right] \cos \psi \\
 &\quad - \left[-g \cos \varphi \sin \lambda + (G' - G'_0) \cos \mathfrak{D}' \sin \mathfrak{K}' \right. \\
 &\quad + G'' \cos(\mathfrak{D}'' + \Delta \mathfrak{D}'') \sin(\mathfrak{K}'' + \Delta \mathfrak{K}'') \\
 &\quad \left. - G''_0 \cos \mathfrak{D}'' \sin \mathfrak{K}'' - \frac{d^2 y'}{dt^2} \right] \sin \psi
 \end{aligned}$$

ist.

Es sei ω ein unendlichkleines Element der unteren Grenzfläche der Atmosphäre, also ein Element der Landes- oder Wasseroberfläche der Erde, α, β, γ seien die Winkel, welche die im Schwerpunkte des Elementes ω auf diesem von der Erde nach aussen gerichtete Normale am Ende der beliebig gedachten Zeit t mit den positiven Richtungen der ursprünglichen Koordinatenachsen einschliesst. Es sei ferner ds der unendlichkleine Weg, welchen der Schwerpunkt des Flächenelementes ω während der unendlichkleinen Zeit dt zurücklegt, und es seien a, b, c die Winkel, welche die Richtung dieses Weges mit den positiven Halbaxen derselben Koordinatenachsen bildet. Wenn dann μ den Winkel vorstellt, welchen die gedachte Normale des Elementes ω mit ds einschliesst, und p_0 den auf das Element ω wirkenden Druck der Atmosphäre, auf die Flächeneinheit reducirt, ausdrückt, so ist die während der unendlich-

kleinen Zeit dt von dem durch den Atmosphärendruck ωp_0 belasteten Flächenelemente ω verrichtete Arbeit:

$$21) \quad -d(dL) = \omega p_0 \cos \mu \cdot ds. \quad *)$$

Es ist aber:

$$\cos \mu = \cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c$$

und, wenn x, y, z die Koordinaten des Schwerpunktes des Flächenelementes ω , auf das erste Axensystem bezogen, vorstellen,

$$22) \quad \begin{cases} \cos a = \frac{dx}{ds}, \\ \cos b = \frac{dy}{ds}, \\ \cos c = \frac{dz}{ds}, \end{cases}$$

und daher

$$\cos \mu = \cos \alpha \cdot \frac{dx}{ds} + \cos \beta \cdot \frac{dy}{ds} + \cos \gamma \cdot \frac{dz}{ds}$$

und

$$23) \quad -d(dL) = \omega p_0 (\cos \alpha \cdot dx + \cos \beta \cdot dy + \cos \gamma \cdot dz).$$

Substituirt man in dieser Gleichung für dx, dy, dz ihre Werthe aus den Gleichungen 6), so erhält man, wenn r für Punkte der Erdoberfläche durch r_0 bezeichnet, und wenn noch $d\lambda = n \cdot dt + d\lambda'$ gesetzt wird, indem man unter n die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, unter $d\lambda'$ aber die Aenderung der geographischen Länge des betrachteten Flächenelementes ω **) versteht:

$$24) \quad \begin{aligned} -d(dL) = & \omega p_0 (\cos \alpha \cdot dx + \cos \beta \cdot dy + \cos \gamma \cdot dz) \\ & + \omega p_0 \cdot r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos \alpha + \cos \psi \cos \lambda \cos \beta \\ & \quad - \sin \psi \cos \lambda \cos \gamma) \cdot n \cdot dt \\ & + \omega p_0 (-r_0 \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - r_0 \cos \varphi \sin \lambda d\lambda' \\ & \quad + \cos \varphi \cos \lambda dr_0) \cos \alpha \\ & + \omega p_0 [\cos \psi (-r_0 \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + r_0 \cos \varphi \cos \lambda d\lambda' \\ & \quad + \cos \varphi \sin \lambda dr_0) \\ & \quad + \sin \psi (r_0 \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr_0)] \cos \beta \\ & + \omega p_0 [\cos \psi (r_0 \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr_0) \\ & \quad - \sin \psi (-r_0 \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + r_0 \cos \varphi \cos \lambda d\lambda' \\ & \quad + \cos \varphi \sin \lambda dr_0)] \cos \gamma. \end{aligned}$$

*) Die Arbeit, welche das Flächenelement ω in der unendlichkleinen Zeit dt verrichtet, bezeichnen wir durch $-d(dL)$, die Arbeit der ganzen Erdoberfläche während dieser Zeit durch $-(dL)$ und die Arbeit derselben Fläche während der endlichen Zeit $\tau - \tau_1$ durch $-(L)_{(\tau - \tau_1)}$.

**) Eine Aenderung der geographischen Länge oder Breite des Elementes ω , oder eine Aenderung von r_0 kann natürlicherweise nur bei der Wasseroberfläche, nicht bei der Landoberfläche vorkommen.

Es seien A, B, C die Winkel, welche die Normale des Flächenelementes ω mit den positiven Halbaxen der secundären Koordinatenachsen einschliesst, so ist:

$$25) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \cos A, \\ \cos \beta = \cos B \cdot \cos \psi + \cos C \cdot \sin \psi, \\ \cos \gamma = \cos C \cdot \cos \psi - \cos B \cdot \sin \psi. \end{cases}$$

Durch Substitution der Werthe für $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ aus den Gleichungen 25) in die Gleichung 24) erhält man:

$$26) \quad \begin{aligned} -d(dL) = & \omega p_0 \cdot (\cos \alpha \cdot dx, + \cos \beta \cdot dy, + \cos \gamma \cdot dz,) \\ & + \omega p_0 r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) n \cdot dt \\ & + \omega p_0 (-r_0 \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - r_0 \cos \varphi \sin \lambda d\lambda' \\ & \quad + \cos \varphi \cos \lambda dr_0) \cos A \\ & + \omega p_0 (-r_0 \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + r_0 \cos \varphi \cos \lambda d\lambda' \\ & \quad + \cos \varphi \sin \lambda dr_0) \cos B \\ & + \omega p_0 (r_0 \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr_0) \cos C. \end{aligned}$$

Hiernach erhält man, wenn man dF statt ω setzt, und nach F integriert, indem man die Integration über die ganze Erdoberfläche ausdehnt:

$$27) \quad \begin{aligned} - (dL) = & dt \cdot \int p_0 \left(\cos \alpha \frac{dx}{dt} + \cos \beta \frac{dy}{dt} + \cos \gamma \frac{dz}{dt} \right) \cdot dF \\ & + n \cdot dt \cdot \int p_0 r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) \cdot dF \\ & + dt \cdot \int p_0 \left[r_0 (-\sin \varphi \cos \lambda \cos A - \sin \varphi \sin \lambda \cos B + \cos \varphi \cos C) \frac{d\varphi}{dt} \right. \\ & \quad + r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) \frac{d\lambda'}{dt} + (\cos \varphi \cos \lambda \cos A \\ & \quad \left. + \cos \varphi \sin \lambda \cos B + \sin \varphi \cos C) \frac{dr_0}{dt} \right] \cdot dF. \end{aligned}$$

Auf der Wasseroberfläche ist das Element ω oder dF mit der Zeit veränderlich, also eine Function von t . *)

Integriert man die Gleichung 27) nach t zwischen den Grenzen τ_1 und τ , so erhält man

*) Um einen bestimmten Begriff von dem veränderlichen Flächenelemente zu erhalten, kann man dem wirklichen Falle einen andern substituieren, indem man sich vorstellt, die Wasseroberfläche sei mit einer vollkommen biegsamen und elastischen Membran von verschwindender Dicke überzogen, und auf dieser Membran sei das Flächenelement ω oder dF verzeichnet.

$$\begin{aligned}
28) \quad - (L)_{(\tau-\tau_1)} = & \int_{\tau_1}^{\tau} \int p_0 \left(\cos \alpha \frac{dx}{dt} + \cos \beta \frac{dy}{dt} + \cos \gamma \frac{dz}{dt} \right) dF \cdot dt \\
& + n \cdot \int_{\tau_1}^{\tau} \int p_0 r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) dF \cdot dt \\
& + \int_{\tau_1}^{\tau} \int p_0 \left[r_0 (-\sin \varphi \cos \lambda \cos A - \sin \varphi \sin \lambda \cos B \right. \\
& \quad \left. + \cos \varphi \cos C) \frac{d\varphi}{dt} \right. \\
& \quad \left. + r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) \frac{d\lambda'}{dt} \right. \\
& \quad \left. + (\cos \varphi \cos \lambda \cos A + \cos \varphi \sin \lambda \cos B + \sin \varphi \cos C) \frac{dr_0}{dt} \right] dF \cdot dt
\end{aligned}$$

oder

$$28') \quad - (L)_{(\tau-\tau_1)} = (\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^I + (\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{II} + (\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{III},$$

wo $(\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^I$ das erste, $(\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{II}$ das zweite und $(\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{III}$ das dritte der drei Integrale der rechten Seite der Gleichung 28) vorstellt. Das erste rührt von der progressiven Bewegung der Erde, das zweite von der Rotation derselben, und das dritte, da für jeden Punkt der festen Oberfläche φ , r_0 und die geographische Länge constant, also $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{dr_0}{dt}$ und $\frac{d\lambda'}{dt}$ Null sind, von den Schwankungen der Meeresfläche her.

Bezeichnen wir denjenigen Theil der Grösse $L_{(\tau-\tau_1)}$, welcher von den weiter oben erwähnten Vorgängen in der Atmosphäre, als der Bildung von Niederschlägen, dem Verschwinden von tropfbarflüssigen Körpern aus der Atmosphäre und von der Bewegung von Wasserbläschen herrührt, durch $(\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{IV}$, so haben wir

$$\begin{aligned}
29) \quad - L_{(\tau-\tau_1)} = & - (L)_{(\tau-\tau_1)} - (\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{IV} = (\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^I \\
& + (\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{II} + (\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{III} - (\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{IV}.
\end{aligned}$$

Wenn eine Wellenbewegung des Meeres nicht bestände, so würde die im Schwerpunkte eines Elementes ω der Meeresoberfläche errichtete Normale nur sehr wenig von der Richtung des nach jenem Punkte gezogenen Erdhalbmessers abweichen, und man hätte sehr genähert:

$$\begin{aligned}\cos A &= \cos \varphi \cos \lambda, \\ \cos B &= \cos \varphi \sin \lambda, \\ \cos C &= \sin \varphi.\end{aligned}$$

Substituirt man die rechten Seiten dieser Gleichungen für $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ in dem dritten Integrale der rechten Seite der Gleichung 27), sowie in dem auf die Meeresfläche bezüglichen Theile des mit der Zahl n multiplicirten Integrals jener Gleichung, so geht die Gleichung 27) über in folgende:

$$\begin{aligned}30) \quad - (dL) &= dt \cdot \int p_0 \left(\cos \alpha \frac{dx}{dt} + \cos \beta \frac{dy}{dt} + \cos \gamma \frac{dz}{dt} \right) \cdot dF \\ &+ n \cdot dt \cdot \int p_0 r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) \cdot dF \\ &+ dt \cdot \int p_0 \frac{dr_0}{dt} \cdot dF,\end{aligned}$$

wo das erste Integral der rechten Seite sich auf die ganze Erdoberfläche, das zweite bloss auf die Landfläche, und das dritte bloss auf die Meeresfläche sich bezieht.

Die in der Gleichung 19) vorkommenden Koeffizienten H , J , P drücken, wie aus den Gleichungen 20) zu ersehen ist, die Quotienten aus, welche man erhält, wenn man mit der Masse dm in die den ursprünglichen Koordinatenachsen parallelen Componenten des Druckes dividirt, welchen die Molekel dm in der Richtung nach dem Erdmittelpunkte hin äussert. Der Druck, welchen in Folge jenes Druckes die Atmosphäre auf ein Element ω der Erdoberfläche ausübt, ist $= p_0 \omega$, und die nach den Richtungen der Axen des ersten Koordinatensystems wirkenden Componenten dieses Druckes sind $- p_0 \omega \cdot \cos \alpha$, $- p_0 \omega \cdot \cos \beta$, $- p_0 \omega \cdot \cos \gamma$. Wenn daher in dem Ausdruck $\Sigma \left(H \frac{dx}{dt} + J \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) dm$ die durch Σ angezeigte Summirung sich über alle Molekel der Atmosphäre erstreckt, so muss sein

$$\begin{aligned}31) \quad \Sigma \left(H \frac{dx}{dt} + J \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) dm + \int p_0 \left(\cos \alpha \cdot \frac{dx}{dt} \right. \\ \left. + \cos \beta \cdot \frac{dy}{dt} + \cos \gamma \cdot \frac{dz}{dt} \right) dF = 0,\end{aligned}$$

unter der Bedingung, dass das Integral nach F über die ganze Erdoberfläche ausgedehnt werde.

Substituirt man die Werthe von

$$\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dx + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dy + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) dz$$

und $L_{(\tau-\tau_1)}$ aus den Gleichungen 19) und 29) in die Gleichung 1), und berücksichtigt man dabei die Gleichungen 28) und 31), so erhält man für die Bewegungen der Atmosphäre die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 32) \quad & \Sigma \left[\int_{\tau_1}^{\tau} \left\{ g - (G' - G'_0) \cdot [\cos \varphi \cos \mathfrak{D}' \cos (\mathfrak{K}' - \lambda) + \sin \mathfrak{D}' \sin \varphi] \right. \right. \\
 & - G'' [\cos \varphi \cos (\mathfrak{D}'' + \mathcal{A} \mathfrak{D}'') \cos (\mathfrak{K}'' + \mathcal{A} \mathfrak{K}'' - \lambda) + \sin \varphi \sin (\mathfrak{D}'' + \mathcal{A} \mathfrak{D}'')] \\
 & + G''_0 [\cos \varphi \cos \mathfrak{D}'' \cos (\mathfrak{K}'' - \lambda) + \sin \varphi \sin \mathfrak{D}''] \\
 & \left. \left. + r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r \cos \varphi^2 \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 r}{dt^2} \frac{dr}{dt} \cdot dt \right\} dm \right. \\
 & = - \frac{g}{A} \Sigma [c (\vartheta - \vartheta_1) \mp (Q - Q_1)] dm + S(p\mathfrak{B})_{\tau} - S(p\mathfrak{B})_{\tau_1} \\
 & + \Sigma \left[\int_{\tau_1}^{\tau} r \cdot (G' - G'_0) [-\sin \varphi \cos \mathfrak{D}' \cos (\mathfrak{K}' - \lambda) + \cos \varphi \sin \mathfrak{D}'] \right. \\
 & + G'' [-\sin \varphi \cos (\mathfrak{D}'' + \mathcal{A} \mathfrak{D}'') \cos (\mathfrak{K}'' + \mathcal{A} \mathfrak{K}'' - \lambda) + \cos \varphi \sin (\mathfrak{D}'' + \mathcal{A} \mathfrak{D}'')] \\
 & - G''_0 [-\sin \varphi \cos \mathfrak{D}'' \cos (\mathfrak{K}'' - \lambda) + \cos \varphi \sin \mathfrak{D}''] \\
 & \left. - r \left[\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \right] \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt \right. \\
 & + \int_{\tau_1}^{\tau} r \cdot \cos \varphi \left[(G' - G'_0) \cos \mathfrak{D}' \sin (\mathfrak{K}' - \lambda) + G'' \cos (\mathfrak{D}'' + \mathcal{A} \mathfrak{D}'') \sin (\mathfrak{K}'' + \mathcal{A} \mathfrak{K}'' - \lambda) \right. \\
 & \left. - G''_0 \cos \mathfrak{D}'' \sin (\mathfrak{K}'' - \lambda) - r \cos \varphi \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \right] \cdot \frac{d\lambda}{dt} \cdot dt \left. \right] dm \\
 & + n \cdot \int_{\tau_1}^{\tau} \int p_0 r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) dF \cdot dt \\
 & + \int_{\tau_1}^{\tau} \int p_0 \left[r_0 (-\sin \varphi \cos \lambda \cos A - \sin \varphi \sin \lambda \cos B + \cos \varphi \cos C) \frac{d\varphi}{dt} \right. \\
 & + r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) \cdot \frac{d\lambda'}{dt} \\
 & \left. + (\cos \varphi \cos \lambda \cos A + \cos \varphi \sin \lambda \cos B + \sin \varphi \cos C) \frac{dr_0}{dt} \right] \cdot dF \cdot dt \\
 & - (L)_{(\tau-\tau_1)}^{\text{IV}} - N_{(\tau-\tau_1)} - \mathfrak{L}_{(\tau-\tau_1)},
 \end{aligned}$$

wo das Integral

$$n \cdot \int_{\tau_1}^{\tau} \int p_0 r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) dF \cdot dt$$

über die ganze Erdoberfläche, das andere Integral nach F aber bloss über die Meeresfläche auszudehnen ist, während die durch Σ ange- deutete Summirung sich über sämtliche Gasmolekel der Atmo- sphäre erstreckt, und die Summen $S(p\mathfrak{B})_\tau$, $S(p\mathfrak{B})_{\tau_1}$, und die Aus- drücke $(\bar{L})_{(\tau-\tau_1)}^{\text{IV}}$, $N_{(\tau-\tau_1)}$ und $\mathfrak{Q}_{(\tau-\tau_1)}$ sich ebenfalls auf die ganze Atmosphäre beziehen.

Die linke Seite der Gleichung 32) drückt, wie man sieht, die Summe der durch die Schwingungen und Strömungen der Atmo- sphäre in den Richtungen der Erdhalbmesser unter der Einwirkung der Anziehungskräfte der Erde, der Sonne und des Mondes, und durch Beschleunigung der Luftmolekel in diesen Richtungen con- sumirten Arbeitsgrössen, das auf der rechten Seite dieser Gleichung vorkommende Integral

$$\int_{\tau_1}^{\tau} \int p_0 \left[r_0 (-\sin \varphi \cos \lambda \cos A - \sin \varphi \sin \lambda \cos B + \cos \varphi \cos C) \frac{d\varphi}{dt} \right. \\ \left. + r_0 \cos \varphi \cdot (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) \frac{d\lambda'}{dt} + (\cos \varphi \cos \lambda \cos A \right. \\ \left. + \cos \varphi \sin \lambda \cos B + \sin \varphi \cos C) \frac{dr_0}{dt} \right] dF \cdot dt$$

aber die Summe der durch die Schwingungen der Meeresfläche unter dem Drucke der Atmosphäre während der Zeit $\tau - \tau_1$ erzeug- ten Arbeitsgrössen aus. Wäre eine Wellenbewegung des Meeres nicht vorhanden, so würde das letztere Integral sehr genähert gleich

sein dem Integral $\int_{\tau_1}^{\tau} p_0 \frac{dr_0}{dt} \cdot dF \cdot dt$, und bloss die Summe der Ar- beitsgrössen ausdrücken, welche durch die der Ebbe und Fluth des Meeres angehörenden Schwingungen der Meeresfläche erzeugt werden.

Der Ausdruck

$$\Sigma \left[\int_{\tau_1}^{\tau} r \left\{ (G' - G'_0) \cdot [-\sin \varphi \cos \mathfrak{D}' \cos (\mathfrak{K}' - \lambda) \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \varphi \sin \mathfrak{D}' + G'' [-\sin \varphi \cos (\mathfrak{D}'' + \mathcal{A}\mathfrak{D}'') \cos (\mathfrak{K}'' + \mathcal{A}\mathfrak{K}'' - \lambda) \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \varphi \sin (\mathfrak{D}'' + \mathcal{A}\mathfrak{D}'') \right] - G''_0 \cdot [-\sin \varphi \cos \mathfrak{D}'' \cos (\mathfrak{K}'' - \lambda) + \cos \varphi \sin \mathfrak{D}''] \right. \\ \left. - r \left[\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \right] \right\} \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt \\ \left. + \int_{\tau_1}^{\tau} r \cos \varphi \left[(G' - G'_0) \cos \mathfrak{D}' \sin (\mathfrak{K}' - \lambda) + G'' \cos (\mathfrak{D}'' + \mathcal{A}\mathfrak{D}'') \sin (\mathfrak{K}'' + \mathcal{A}\mathfrak{K}'' - \lambda) \right. \right. \\ \left. \left. - G''_0 \cos \mathfrak{D}'' \sin (\mathfrak{K}'' - \lambda) - r \cos \varphi \cdot \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \right] \cdot \frac{d\lambda}{dt} \cdot dt \right] dm$$

drückt die Summe der Arbeitsgrössen aus, welche durch die auf die Luftmolekel wirkenden Anziehungskräfte der Sonne und des Mondes auf den auf der Kugelfläche *) der Erde beschriebenen Wegen der Luftmolekel erzeugt werden, vermindert um die durch die Beschleunigung der Luftmolekel in den Richtungen dieser Wege verbrauchten Arbeitsgrössen.

Das Integral

$$n \cdot \int_{\tau_1}^{\tau} p_0 r_0 \cos \varphi (-\sin \lambda \cos A + \cos \lambda \cos B) dF \cdot dt$$

repräsentirt die Summe der Arbeitsgrössen, welche vermöge der Rotation der Erde durch die von der Kugelfläche derselben abweichenden Flächentheile der festen Oberfläche und der Oberfläche des in Wellenbewegung befindlichen Meeres unter dem Drucke der Atmosphäre während der Zeit $\tau - \tau_1$ erzeugt werden.

Die Gleichung 32) gibt noch ein sehr genähert richtiges Resultat, wenn in den Ausdrücken $\cos(\mathcal{R}'' + \Delta \mathcal{R}'' - \lambda)$, $\sin(\mathcal{R}'' + \Delta \mathcal{R}'' - \lambda)$, $\cos(\mathcal{D}'' + \Delta \mathcal{D}'')$ und $\sin(\mathcal{D}'' + \Delta \mathcal{D}'')$ die Grössen $\Delta \mathcal{R}''$ und $\Delta \mathcal{D}''$ ausser Acht gelassen werden. Ferner kann man in den Koeffizienten von $\frac{d\lambda}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ die Grösse r als Constante behandeln. Ist der Zeitraum $\tau - \tau_1$ klein, nicht grösser als einige Stunden, so können $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}''$, $\mathcal{D}'$ und $\mathcal{D}''$ ebenfalls als Constanten gelten. Endlich kann man, ohne einen merklichen Fehler befürchten zu müssen, die Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde auch für grössere Zeiträume als constant ansehen. Die Grössen G'_0 und G''_0 sind dann Constanten, die Grössen G' und G'' aber Functionen bloss der Veränderlichen λ , φ und r .

*) Unter dem während der Zeit $\tau - \tau_1$ auf der Kugelfläche der Erde beschriebenen Wege einer Molekel dm hat man sich hier die Summe der Projectionen der zwischen den Endpunkten der Zeiten τ_1 und τ in unendlichkleinen Zeittheilen von der Molekel dm zurückgelegten unendlichkleinen Wege auf die mit den jedesmaligen Werthen von r um den Erdmittelpunkt beschriebenen Kugelflächen vorzustellen.

Verbesserungen.

S. 5 Z. 8 von oben statt $\Sigma \left(\int \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right)$ lese man $\Sigma \left(\int \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dt \right) dm$.

S. 14 Z. 19 von oben statt anderes lese man Anderes.

S. 19 Z. 13 von unten, sowie S. 20 Z. 21 von oben ist am Ende der Zeile statt des Komma ein Doppelpunkt zu setzen.

S. 29 Z. 12 von oben ist statt des Doppelpunkt ein Semikolon zu setzen.

S. 34 Z. 3 von oben statt V_1^2 lese man V^2 .

S. 36 Z. 6 von oben statt $\Sigma(x - x_1) dm$ lese man $g \Sigma(x - x_1) dm$.

S. 38 Z. 6 von oben statt $\overset{I+III}{\mathfrak{B}}_1$ lese man $\overset{III+IV}{\mathfrak{B}}_1$.

S. 38 Z. 8 von unten statt $\Sigma \frac{g}{A} (Q - Q_1) dm$ lese man $\frac{g}{A} \Sigma (Q - Q_1) dm$.

Verbesserungen.

Druck von Carl Georgi in Bonn.

Rhodius, Albert

Ein neuer Lehrsatz der Aërodynamik, nebst den Anwendungen dieses Satzes
auf die Gebläse- und Wettermaschinen und die calorischen Maschinen und auf
die Bewegungen der Atmosphäre

Bonn 1865

Math.a. 206 z

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081093-2